更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

KNOWLEDGE SOURCES

2024
考研数学

接力题典

1800

数学二 【题目册】

适用阶段 基础·强化·提高

汤家凤 编著

·依据新大纲 第9次升级

题型丰富 重要考点反复练

备考各阶段 难度层层升级

不同水平考生皆可适用

6000 分钟配套视频助上岸

中国政法大学出版社

有任何网盘群类资料需求 请关注微信公众号或添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

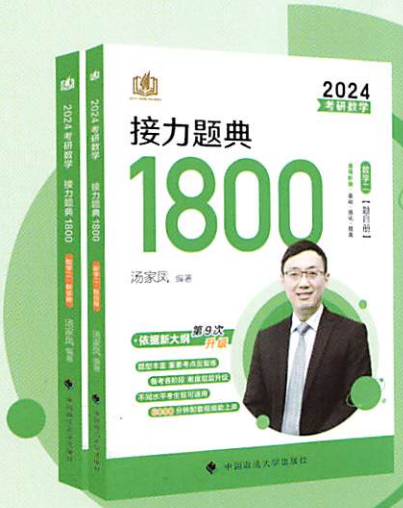
更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

扫码获取官方
授权正版店铺

打基础必选
伴学5件套

◆立足基础，针对基础薄弱考生，添加预备章，每章配备知识框架图。

◆汤老师精心编撰，每章均给出考查要求，配备系统归纳和总结，大幅提高应试能力。



◆题型丰富，重要考点反复练
◆备考各阶段，难度层层升级
◆不同水平考生皆可适用
◆6000分钟配套视频助上岸

◆总结知识体系，分类整理题型，解答规范，多角度解析部分题目。

◆厘清本源，完善基础知识框架，100余种重点题型反复学，配备测试题，巩固理论方法，黄金搭配1800。

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

KNOWLEDGE SOURCES

2024
考研数学

接力题典 1800

数学一【题目册】

适用阶段一基础·强化·提高

汤家凤 编著

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

中国政法大学出版社
2022·北京

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

声　　明　1. 版权所有，侵权必究。

2. 如有缺页、倒装问题，由出版社负责退换。

图书在版编目（CIP）数据

考研数学接力题典 1800. 数学二/汤家凤编著. —北京：中国政法大学出版社，2021.12（2022.11重印）

ISBN 978-7-5764-0188-2

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①汤… Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2021)第 248328 号

出 版 者　中国政法大学出版社

地　　址　北京市海淀区西土城路 25 号

邮寄地址　北京 100088 信箱 8034 分箱　邮编 100088

网　　址　http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）

电　　话　010-58908285（总编室）58908433（编辑部）58908334（邮购部）

承　　印　三河市金元印装有限公司

开　　本　787mm×1092mm　1/16

印　　张　32.25

字　　数　804 千字

版　　次　2021 年 12 月第 1 版

印　　次　2022 年 11 月第 7 次印刷

定　　价　89.00 元（全两册）

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

前言

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

全国硕士研究生招生考试数学试卷分为数学一、数学二、数学三，其中数学一、数学三需要复习高等数学、线性代数、概率统计，数学二需要复习高等数学和线性代数。各试卷题型及分值分布一致，题型分选择题、填空题、解答题（包括计算题、证明题、应用题等），选择题10题，分值50分，填空题6题，分值30分，解答题70分。由于考研数学复习内容量大面广，需要考查考生对基本概念的理解，基本公式及基本原理的掌握，同时需要考生具有很强的计算能力、综合分析能力、逻辑推理能力、空间想象能力及实际应用能力。要牢固掌握基础知识并用所学知识融会贯通地解决问题，就需要进行系统的练习。那么拥有一本通过分层递进的习题训练达到基础知识的掌握和解题能力的提高，并能帮助考生最终取得优异成绩的习题册就成为广大考研学子的迫切需求。

本书是作者在长达二十多年的考研数学授课、阅卷及对新大纲深入研究的基础上，根据考研数学命题趋势及命题的重点、难点和考生的弱点，从广大考生的实际出发精心编写而成。

本书分基础篇、提高篇和精选试题，包括高等数学和线性代数。基础篇是针对基础复习阶段而设计的，注重对基本概念的理解，基本原理和基本方法的掌握，为复习打下坚实的基础；提高篇和精选试题适用于复习的强化和提高阶段，注重基本概念的深化、原理的拓展，同时训练计算能力、综合分析能力、证明问题的能力、利用数学知识解决实际问题的能力。本书设计问题的难度和综合性比考试的要求略高，从这些年的使用情况看，达到了非常好的效果。

本书针对数学二的考生编写，其主要特点有：

1. 每部分的题目都是严格依据最新考纲的规定，无论是题型还是知识点都是依据考试的要求设计。基础篇每部分融合了基本概念、基本原理、基本方法的考查点，知识覆盖面广，题型丰富、新颖。通过基础篇的系统练习，考生扎实掌握基础知识，对考纲和考试有清晰的认识，为强化复习打下扎实的基础。

2. 强化复习是数学取得高分非常关键的阶段，不仅强化课程非常关键，习题的设计也是非常重要的一环。本书提高篇的题目和精选试题侧重对考生的

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

PREFACE

复杂计算能力、逻辑推理能力、综合分析能力和实际应用能力的训练。

3. 本书题目从题型的难度和综合性等方面都体现了整个数学的认知过程，各部分解答力求通俗易懂，方法独到，从最近这些年的使用情况看基本达到了考试对知识点、题型和题目难易度考查的要求。

数学复习不同于其他科目的复习，大家复习时一定要早动手、重基础、循序渐进。基础阶段一定要先建立整个数学的知识框架和体系，然后做一些基础练习（基础知识考查所占分值比重较大，切不可好高骛远）；强化阶段是数学复习脱胎换骨的阶段，通过进一步训练综合题型来提高自己的各种数学能力和应试技巧以及对考试的适应能力，这是贯穿本书的设计理念。

本书从初次出版到现在的若干年中，受到全国广大学子的厚爱和同仁的支持，在此表示由衷的感谢。

限于本人能力，书中不足之处难免，感谢全国广大学子和同仁的不吝指正。

欢迎各位同学在学习之余关注汤老师新浪微博、微信公众号及 B 站，汤老师将在这些平台对书中部分题目做直播预告及讲解。

汤家凤

2022 年 11 月于南京

抖音：汤家凤　　小红书：数学汤家凤
B 站：数学汤家凤　　视频号：数学汤家凤

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

目录

基础篇

第一部分 高等数学 / 3

一、函数、极限、连续 3
二、导数与微分 11
三、中值定理与一元函数微分学的应用 16
四、不定积分 22
五、定积分及应用 25
六、多元函数微分学 35
七、重积分 40
八、微分方程 45

第二部分 线性代数 / 50

一、行列式 50
二、矩阵 51
三、向量 55
四、线性方程组 57
五、矩阵的特征值和特征向量 60
六、二次型 65

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

提高篇

第一部分 高等数学 / 71

一、函数、极限、连续 71
二、导数与微分 77
三、中值定理与一元函数微分学的应用 80
四、一元函数积分学 85
五、多元函数微分学 91
六、重积分 93
七、微分方程 96

第二部分 线性代数 / 101

一、行列式 101
二、矩阵 102
三、向量 104
四、线性方程组 106
五、矩阵的特征值和特征向量 109
六、二次型 113

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

精选试题

第一部分 高等数学 / 117

一、函数、极限、连续 117
二、一元函数微分学 121
三、一元函数积分学 126
四、多元函数微分学 130
五、重积分 132
六、微分方程 133

第二部分 线性代数 / 135

一、选择题 135
二、填空题 137
三、解答题 138

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

基础篇

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

第一部分 · 高等数学

一 函数、极限、连续

入门练习

选择题 答案见解答册 002 页

1. 下列命题正确的是(　　).

(A) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 都不存在,则$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)$一定不存在

(B) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 都不存在,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n$一定不存在

(C) 若$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都无界,则$\{a_nb_n\}$无界

(D) 若$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都为无穷大,则$\{a_nb_n\}$为无穷大

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

2. 设$\alpha=x^2-\ln^2(1+x)$,$\beta=\dfrac{e^{\sqrt{1+x^3}}-e^{\sqrt{1-x^3}}}{e}$,则当$x\to0$时(　　).

(A)α是β的高阶无穷小　　(B)α是β的低阶无穷小

(C)α是β的同阶而非等价的无穷小　　(D)α是β的等价无穷小

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sqrt{4n^2+n}\,\pi=$(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(D) 不存在

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax+|x|}{x}\arctan\dfrac{1}{x}=b(\neq0,\infty)$,则(　　).

(A)$a=0,b=-\dfrac{\pi}{2}$　　(B)$a=0,b=\dfrac{\pi}{2}$

(C)$a=1,b=\dfrac{\pi}{2}$　　(D)$a=-1,b=\dfrac{\pi}{2}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+a\sin x}-\sqrt{1+\tan x}}{x^3}=b(\neq0,\infty)$,则(　　).

(A)$a=1,b=-\dfrac{1}{4}$　　(B)$a=1,b=\dfrac{1}{4}$

(C)$a=-1,b=-\dfrac{1}{4}$　　(D)$a=-1,b=\dfrac{1}{4}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$,则(　　).

(A)$a=1,b=-1$　　(B)$a=2,b=1$

(C)$a=2,b=-2$　　(D)$a=-2,b=2$

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

7. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin ax}{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{b+t^4}}\mathrm{d}t}=2$，则（　　）.

(A) $a=1,b=2$　　(B) $a=1,b=4$

(C) $a=1,b=6$　　(D) $a=1,b=16$

8. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4\arctan x+a\sin(\mathrm{e}^{2x}-1)}{x}, & x<0,\\ b, & x=0,\\ \dfrac{2x-\ln(1+2x)}{x^2}, & x>0,\end{cases}$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则（　　）.

(A) $a=-1,b=2$　　(B) $a=-1,b=-2$

(C) $a=1,b=-2$　　(D) $a=1,b=2$

9. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}, & x\neq 1,\\ 1, & x=1,\end{cases}$ 则（　　）.

(A) $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续　　(B) $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点

(C) $x=1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点　　(D) $x=1$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点

10. 设 $f(x)=\dfrac{|\ln|x||}{x^2-1}$，则 $f(x)$ 有（　　）.

(A) 两个跳跃间断点，一个第二类间断点

(B) 两个可去间断点，一个第二类间断点

(C) 一个可去间断点，一个跳跃间断点，一个第二类间断点

(D) 三个第二类间断点

填空题 答案见解答册 004 页

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+2x)}=$_____.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{1-\cos^2 x}=$_____.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\ln^2(1+x)}{\sqrt{1+x\cos x}-\sqrt{1+x}}=$_____.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{2x}=$_____.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{\frac{x^2+2x}{x+1}}=$_____.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+3x+2}{(x+1)^n-x^n}=b(\neq 0,\infty)$，则 $n=$_____，$b=$_____.

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(3x^2+2x+2)}{\ln(2x^4+3x-1)}=$_____.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$_____.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1-\cos x}-\dfrac{2}{x^2}\right)=$_____.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

10 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^{\frac{2x^2+3x+2}{x+1}}=\lim\limits_{x\to0}(\cos x+x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$，则 $c=$_____.

11 当 $x\to0$ 时，$\sqrt{1+ax^2}-1\sim1-\cos^2 x$，则 $a=$_____.

12 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+x^{2n}}\ (x>0)$，则 $f(x)=$_____.

13 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)=$_____.

14 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan 3x+e^{ax}-1}{x}, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{1-(1-x^2)^b}{x\arcsin 2x}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$_____，$b=$_____.

15 设 $f(x)=\dfrac{2-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\cdot\arctan\dfrac{1}{x}$，则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的_____间断点.

解答题 ▶答案见解答册 006 页

1 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+2x)^{\sin x}-1}{x^2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(e+\sin 2x)-1}{x}$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{\tan^2 x}$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{x^3}$.

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\cos x}-\sqrt{1+x}}{x^2\arcsin 2x}$.

2 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x+x^2)^{\frac{1}{x\ln(1+x)}}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}(e^x+e^{\sin 2x}-1)^{\frac{1}{x}}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2x}$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

3 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x+1}-\sqrt{x^2-2x+3})$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\arctan x-\dfrac{\pi}{2}x\right)$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

4 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin 2x}$.

5 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{2}{1\times3}+\dfrac{2}{3\times5}+\cdots+\dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}\right]^{\frac{2n^2+1}{n+1}}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1}}$.

6 设 $a_1>0$，$a_{n+1}=\ln(1+a_n)\ (n=1,2,\cdots)$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(1) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求此极限；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_na_{n+1}}$.

7 设 $0<a_1<\pi,a_{n+1}=\sin a_n(n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求此极限；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a_{n+1}^2}-\dfrac{1}{a_n^2}\right)$.

8 设 $a_1=1,a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求此极限.

9 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且 $f(0)+2f(1)+3f(2)=6$，证明：存在 $c\in[0,2]$，使得 $f(c)=1$.

10 求函数 $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-1}e^{\frac{1}{x}}$ 的间断点，并进行分类.

11 求 $f(x)=e^{\frac{x-\frac{\pi}{4}}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$ 在 $(0,2\pi)$ 内的间断点，并进行分类.

基础练习

选择题 答案见解答册 009 页

1 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}=$(　　).

(A)0　　(B)1

(C)$\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$　　(D)$\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

2 函数 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x},-\infty<x<+\infty$ 是(　　).

(A) 有界函数　　(B) 单调函数

(C) 周期函数　　(D) 偶函数

3 当 $x\to 0$ 时，下列无穷小中，哪个是比其他三个更高阶的无穷小(　　).

(A)x^2　　(B)$1-\cos x$

(C)$\sqrt{1-x^2}-1$　　(D)$x-\tan x$

4 当 $x\to 0^+$ 时，下列无穷小中，阶数最高的是(　　).

(A)$\ln(1+x^2)-x^2$　　(B)$\sqrt{1+x^2}+\cos x-2$

(C)$\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t$　　(D)$e^{x^2}-1-x^2$

5 设当 $x\to 0$ 时，$(x-\sin x)\ln(1+x)$ 是比 $e^{x^n}-1$ 高阶的无穷小，而 $e^{x^n}-1$ 是比 $\dfrac{1}{x}\int_0^x(1-\cos^2 t)\mathrm{d}t$ 高阶的无穷小，则 n 为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

6 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x^a\arctan x}=b(\neq 0,\infty)$，则(　　).

(A)$a=1,b=1$　　(B)$a=1,b=-1$

(C)$a=1,b=4$　　(D)$a=1,b=-4$

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos 2x}-\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^a}=b(\neq 0,\infty)$，则（　　）.

(A) $a=2,b=\dfrac{1}{2}$　　(B) $a=-2,b=-\dfrac{1}{2}$

(C) $a=2,b=-\dfrac{1}{2}$　　(D) $a=-2,b=\dfrac{1}{2}$

8. 设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)+xf(x)}{x^2}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+f(x)}{x}=$（　　）.

(A)2　　(B) -2　　(C)4　　(D) -4

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[x]}{2x+1}=$（　　）.

(A)0　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C)1　　(D)∞

10. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$（　　）.

(A) 等于 1　　(B) 为 ∞

(C) 不存在但不是 ∞　　(D) 等于 0

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

11. 当 $x\to 1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限为（　　）.

(A)2　　(B)0　　(C)∞　　(D) 不存在但不是 ∞

12. 设 $f(x)$ 一阶连续可导，且 $f(0)=0,f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{\arcsin x}}=$（　　）.

(A)e^{-1}　　(B)e　　(C)e^2　　(D)e^3

13. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）.

(A) 连续点　　(B) 第一类间断点

(C) 第二类间断点　　(D) 不能判断连续性的点

14. 设 $f(x)$ 是不恒为零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，若 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，则（　　）.

(A)$g(x)$ 在 $x=0$ 处无极限　　(B)$x=0$ 为 $g(x)$ 的可去间断点

(C)$x=0$ 为 $g(x)$ 的跳跃间断点　　(D)$x=0$ 为 $g(x)$ 的第二类间断点

15. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，则 $f(x)$（　　）.

(A) 无间断点　　(B) 有间断点 $x=1$

(C) 有间断点 $x=-1$　　(D) 有间断点 $x=0$

16. $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}$ 的（　　）.

(A) 可去间断点　　(B) 跳跃间断点

(C) 连续点　　(D) 第二类间断点

填空题 ▶ 答案见解答册 011 页

1. 设 $f(x)=\sin x,f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)=$_____，定义域为_____.

2. 设 $a>0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{(b-\cos x)\sqrt{a+x^2}}=1$，则 $a=$_____，$b=$_____.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

3 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\cos x}-\sqrt{1+\arcsin x}}{x^3}=$_____.

4 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(\sin x)-x}{x^3}=$_____.

5 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin^2 x-\tan^2 x}{x^4}=$_____.

6 若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$,则 $a=$_____,$b=$_____.

7 $\lim\limits_{x\to0}(x^2+\cos 2x)^{\frac{1}{x-\ln(1+x)}}=$_____.

8 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin^2\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=$_____.

9 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\arctan\dfrac{1}{x-1}-\arctan\dfrac{1}{x+1}\right)=$_____.

10 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=$_____.

11 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(e^{x^2}+2x+1)}{2x^2+3}=$_____.

12 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^4}\sqrt{n^4-i^4}=$_____.

13 当 $x\to0$ 时,$(1+ax^2)^{\frac{1}{2}}-1\sim(1+x)^{\sin 2x}-1$,则 $a=$_____.

14 当 $x\to0^+$ 时,$x-\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\sim ax^b$,则 $a=$_____,$b=$_____.

15 当 $x\to0$ 时,$\ln\cos ax\sim-2x^b(a>0)$,则 $a=$_____,$b=$_____.

16 设 $f(x)$ 连续,且 $f(0)=0$,$f'(0)=2$,则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{e^{x^2}-\cos x}=$_____.

17 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arcsin 2x^2+e^{ax^2}-1}{\ln(1+2x^2)}, & x\neq0,\\ a, & x=0\end{cases}$在 $x=0$ 处连续,则 $a=$_____.

18 设 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{2}{x\arctan x}}, & x\neq0,\\ a, & x=0\end{cases}$在 $x=0$ 处连续,则 $a=$_____.

19 设 $f(x)$ 连续可导,$f(0)=0$ 且 $f'(0)=b$,若 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq0,\\ A, & x=0\end{cases}$在 $x=0$ 处连续,则 $A=$_____.

20 设 $f(x)$ 连续,且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x+xf(x)}{x^3}=\dfrac{2}{3}$,则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+f(x)}{x^2}=$_____.

解答题 答案见解答册015页

1 求下列极限:

(1)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1-2x}}{x}$.

(2)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x\cdot[\sin x-\sin(\sin x)]}{x^4}$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-xe^{-x}}{x^2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\dfrac{1+2x}{3}\right)^{(x-1)^2}-1}{\sin^3\pi x}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{x}{\ln(1+x)}}{\ln(1+2x)}$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2}{x}$.

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos^2 x-\sin x}{\arcsin^2 x\ln(1+2x)}$.

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{\cos 2x+e^{-x^2}}{2}\right)^x-1}{x^2-\ln^2(1+x)}$.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\sin x)-x}{x^3}$.

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2}$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2+\sin x)-\ln(2+x)}{x^3}$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

3. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x\sin 2x)^{\frac{1}{x-\ln(1+x)}}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1+xe^{2x}}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{-x^2}+\cos x-1)^{\frac{1}{x^2}}$.

4. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^9}{(x+1)^{10}-(x-1)^{10}}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(3x^2+2x+1)}{\ln(2x^6+x^2+3)}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x\sin x}{x^2-2x\cos\dfrac{1}{x}}$.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sqrt{4x^2+1}}$.

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}$.

5. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left[\dfrac{1}{x}-\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln\sin 2x$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\arctan\dfrac{1}{2x-1}-\arctan\dfrac{1}{2x+1}\right)$.

6. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x\arctan x-\pi x)$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+6}+x\right)$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-x^3\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\arcsin^2 x}\right)$.

7. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan 2x}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin 2x}$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

8 求$\lim\limits_{x\to 1}\left(\tan\dfrac{\pi}{4}x\right)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$.

9 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

10 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$.

11 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]}{\arctan^2 x}=A$,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

12 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(e^t-1-t)^2dt}{x^2(x-\arctan x)}$.

13 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}(a_i>0,i=1,2,\cdots,n)$.

14 设$f(x)$连续,$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+\cos x]^{\frac{1}{x}}=e^3$,且$f'(0)$存在,求$f'(0)$.

15 设$f(x)$二阶连续可导,$f''(0)=4$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$,求$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

16 设曲线$y=x^n$在点$(1,1)$处的切线交x轴于点$(\xi_n,0)$,求$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n^{2n}$.

17 计算下列极限.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3+n^2+n+1}+\dfrac{2^2}{n^3+n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n^2+n+n}\right)$.

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n^2}{n^2}\right)}$.

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin^2\frac{\pi}{n}}{n}+\dfrac{\sin^2\frac{2\pi}{n}}{n}+\cdots+\dfrac{\sin^2\frac{n\pi}{n}}{n}\right)$.

18 确定常数a,c,使得$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_0^x(e^{t^2}-1)dt}=c$,其中$c$为非零常数.

19 设$\lim\limits_{x\to 0}(x^{-3}\sin 3x+ax^{-2}+b)=0$,求$a,b$.

20 设$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax+b}+cx+d)=0$,求$a,b,c,d$.

21 设$a_1>0$,$a_{n+1}=\ln(1+a_n)$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在,并求此极限.

22 设$0<a_1<2$,又$a_{n+1}=\sqrt{a_n(2-a_n)}$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

23 设$a_n=\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}}}_{(n\text{重})}$,证明:$\{a_n\}$收敛,并求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

24 设$f(x)=\dfrac{x}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$,求$f(x)$的间断点并判断其类型.

25 设$f(x)=\dfrac{1-e^{\frac{1}{x-1}}}{1+e^{\frac{2}{x-1}}}\arctan\dfrac{1}{x}$,求$f(x)$的间断点,并分类.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

26 设 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，求 $f(x)$ 的间断点并判断其类型.

27 设 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{1}{x^2-1}$，求 $f(x)$ 的间断点并判断其类型.

28 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^n+x^n)}{n}(x>0)$ 的连续性.

二 导数与微分

入门练习

选择题 ▶答案见解答册 023 页

1 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，$\varphi(x)=|x-a|f(x)$，若 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则(　　).

(A)$f(a)=0$　(B)$f(a)\neq 0$　(C)$f'(a)=0$　(D)$f'(a)\neq 0$

2 设 $f(x)$ 以 2 为周期且 $f'(1)=\pi$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3+2x)-f(-1-\sin x)}{x}=$(　　).

(A)π　(B)2π　(C)3π　(D)4π

3 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(1-2^{\frac{1}{x}})}{1+2^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则(　　).

(A)$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续可导　(B)$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，但导数不连续

(C)$f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导但连续　(D)$f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

4 设 $g(x)$ 为有界函数，$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\ln(1+x)}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ x^2g(x), & x\leqslant 0,\end{cases}$ 则(　　).

(A)$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

(B)$f(x)$ 在 $x=0$ 连续，但不可导

(C)$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

(D)$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在

5 下列函数中，在 $x=0$ 处可导的是(　　).

(A)$f(x)=\dfrac{|x|}{x+1}$　(B)$f(x)=\sqrt{\cos x}$

(C)$f(x)=x\arctan\dfrac{1}{x}$　(D)$f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

6 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+a, & x<0,\\ \ln(1+bx), & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则(　　).

(A)$a=1,b=1$　(B)$a=1,b=2$

(C)$a=0,b=1$　(D)$a=0,b=2$

7 设 $f(x)=\begin{cases}x^a\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ x^2, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，但 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，则(　　).

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(A) $-1<a<0$　　(B) $0<a<1$

(C) $1<a\leqslant 2$　　(D) $2\leqslant a<3$

8 下列结论正确的是(　　).

(A) 若$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(-h)}{h}$存在,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

(B) 若$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(-h)}{h}$存在,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,但不一定可导

(C) 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f[\ln(1+x^2)]}{x^2}$存在,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

(D) 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f[\ln(1+2x)]-3}{x}$存在,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

填空题 ▶答案见解答册025页

1 设 $f(x)$ 连续可导,且$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+1}{x-1}=2$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+2x)-f(1-3x)}{x}=$_____.

2 设 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{10x}-10)$,则 $f'(0)=$_____.

3 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x^2(1-t^2)^{\frac{x}{\sin t^2}}$,则 $f'(x)=$_____.

4 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的可导函数,且$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-5+2h)+2}{h}=-2$,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-3,f(-3))$ 处的切线为_____.

5 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导且 $f(1)=0$,$f'(1)=\pi$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x)}{\ln(1+x^2)}=$_____.

6 设 $y=x^{\tan 2x}$,则 $\mathrm{d}y=$_____.

7 设 $y=y(x)$ 由 $e^{xy}+\sin xy=4x+y$ 确定,则 $y''(0)=$_____.

8 设 $e^{x+y}=xy+1$,则 $y'(0)=$_____.

9 设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+ax), & x>0,\\ e^{2x}+b, & x\leqslant 0\end{cases}$且 $f'(0)$ 存在,则 $a=$_____,$b=$_____.

10 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos x}{x}, & -\dfrac{\pi}{2}<x<0,\\ \ln(e+ax)+b, & x\geqslant 0\end{cases}$在 $x=0$ 处可导,则 $a=$_____,

$b=$_____.

解答题 ▶答案见解答册027页

1 计算下列函数的导数.

(1) $y=\ln^2\arctan x$.　　(2) $y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}+\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$.

(3) $y=x^{\sin 2x}$.　　(4) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

2 (1) 设 $y=y(x)$ 由 $e^{xy}=x^2+y^2+1$ 确定,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(2) 设 $y=y(x)$ 由 $\sin xy+y-3x=1$ 确定,求 $y'(0)$.

(3) 设 $y=y(x)$ 由 $e^{xy}=\sin 2x+y^3$ 确定,求 $y'(0)$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

3 设 $f(x)=\begin{cases}2x+b, & x<0,\\ \ln(1+ax)+1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 且 $f'(0)$ 存在，求 a,b.

4 设 $y=\ln(2x+1)$，求 $y^{(n)}(n\geqslant 2)$.

5 设 $f(x)=\dfrac{1}{4x^2-1}$，求 $f^{(n)}(0)$.

6 (1) 设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\ln(1+t^2)\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=\sin 2t\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

基础练习

选择题 答案见解答册 028 页

1 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的可导函数，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2x-1)-2f(3-2x)}{\ln x}=3$，则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2-3x)+f(-x)}{2^x-2}=$（　　）.

(A) $\dfrac{1}{\ln 2}$　　(B) $-\dfrac{1}{\ln 2}$　　(C) $\dfrac{2}{\ln 2}$　　(D) $-\dfrac{2}{\ln 2}$

2 设函数 $f(x)$ 在 $|x|<\delta$ 内有定义且 $|f(x)|\leqslant x^2$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）.

(A) 不连续　　(B) 连续但不可微

(C) 可微且 $f'(0)=0$　　(D) 可微但 $f'(0)\neq 0$

3 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处导函数连续，则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处（　　）.

(A) 不一定连续　　(B) 连续，但不一定可导

(C) 可导　　(D) 导函数连续

4 下列结论正确的是（　　）.

(A) 若 $f(x),g(x)$ 在 $x=a$ 处不可导，则 $f(x)g(x)$ 在 $x=a$ 处一定不可导

(B) 若 $f(x),g(x)$ 在 $x=a$ 处不可导，则 $f[g(x)]$ 在 $x=a$ 处一定不可导

(C) 若 $f(x),g(x)$ 在 $x=a$ 处不可导，则 $f(x)+g(x)$ 在 $x=a$ 处一定不可导

(D) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导且 $f(a)\neq 0$，则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处一定可导

5 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ 存在是 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的（　　）.

(A) 充分条件　　(B) 必要条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

6 设 $f(x)$ 连续，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x)-2}{x^2}$ 存在是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的（　　）.

(A) 充分条件　　(B) 必要条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

7 设 $\varphi(x)$ 连续，$f(x)=|x-a|\varphi(x)$，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的充要条件是（　　）.

(A) $\varphi(a)=1$　　(B) $\varphi(a)=-1$　　(C) $\varphi(a)=0$　　(D) $\varphi'(a)=0$

8 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ x^2, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 则在 $x=0$ 处 $f(x)$（　　）.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(A) 不连续　　(B) 连续但不可导
(C) 可导但导数不连续　　(D) 导数连续

9 设 $y=y(x)$ 由 $x-\int_1^{x+y}e^{-t^2}dt=0$ 确定，则 $y''(0)=$(　　).

(A)$2e^2$　　(B)$2e^{-2}$　　(C)e^2-1　　(D)$e^{-2}-1$

10 若 $f(-x)=-f(x)$，且在$(0,+\infty)$内 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，则在$(-\infty,0)$内(　　).

(A)$f'(x)<0$，$f''(x)<0$　　(B)$f'(x)<0$，$f''(x)>0$
(C)$f'(x)>0$，$f''(x)<0$　　(D)$f'(x)>0$，$f''(x)>0$

11 设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上连续，在$(0,+\infty)$内可导，则(　　).

(A) 若 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$
(B) 若 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$
(C) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$
(D) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A>0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

填空题 ▶答案见解答册030页

1 设 $f(x)$ 为连续的偶函数，且 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=1$，则 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(-1+2h)}{h}=$_____.

2 设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-1}{x-a}=2$，则 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f^2(a+2h)-f^2(a-h)}{h}=$_____.

3 设 $f(x)$ 连续，且 $f(1)=0$，$f'(1)=-4$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\cos x)-f(e^{x^2})}{x\ln(1+2x)}=$_____.

4 设 $y=x^{2^x}$，则 $dy=$_____.

5 设 $y=y(x)$ 由 $\sqrt{x^2+y^2}+\ln y=1+2xy$ 确定，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$_____.

6 设 $y=y(x)$ 由 $e^{x+y}+\cos xy=\sin 3x+2$ 确定，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$_____.

7 设 $f(x)$ 是以2为周期的连续函数，且 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+2}{x-1}=3$，则曲线 $L:y=f(x)$ 在点$(-3,f(-3))$处的切线方程为_____.

8 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=$_____.

9 设 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=0$，$f'(0)=4$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(x-t)dt}{x^2}=$_____.

10 设 $\varphi(x)=\int_0^{x^2}(x^2-t)f(t)dt$，其中 f 连续，则 $\varphi''(x)=$_____.

11 设 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{d}{dx}\int_{-x}^{x}[f(t+x)+f(t-x)]dt=$_____.

12 设 $y=f(x)$ 连续，且 $f(x)=2x+1+o(x-2)$，则 $dy|_{x=2}=$_____.

13 设 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$ 在 $x_0=-1$ 取得增量 $\Delta x=0.05$ 时，函数增量 Δy 的线性部分为

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

0.15，则 $f'(1)=$_____.

14 设 $f(x)=\ln(1-x^2)$，则 $f^{(10)}(0)=$_____.

15 设 $f(x)=\dfrac{7x-2}{2x^2+x-1}$，则 $f^{(n)}(0)=$_____.

16 设 $f(x)=\ln(2x^2-x-1)$，则 $f^{(n)}(x)=$_____.

17 设 $\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=\cos t,\end{cases}$ 则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$_____.

18 设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\ln(1+t),\\ e^{yt}=y+2t+1\end{cases}$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$_____.

解答题 ▶答案见解答册 033 页

1 (1) 设 $y=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+x}e^{\sin^2(2x+1)}$，求 y'.

(2) 设 $y=x^{\sin\frac{1}{x}}$，求 y'.

(3) 设 $y=2^{\arctan\frac{1-x^2}{1+x^2}}$，求 y'.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

2 设 $y=\ln(2+3^{-x})$，求 $dy|_{x=0}$.

3 设 $y=f\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)$，且 $f'(x)=\dfrac{1}{3}\ln x$，求 y'.

4 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to0}x(1+tx)^{\frac{1}{t}}$，求 $d[f(x)]|_{x=1}$.

5 (1) 设 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，求 $y''(0)$.

(2) 由方程 $\sin xy+\ln(y-x)=x$ 确定函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$.

(3) 设 $y=y(x)$ 是由 $e^{xy}-x+y-2=0$ 确定的隐函数，求 $y''(0)$.

(4) 设 $\int_0^{x^2}te^t\,dt+\int_0^{\ln y}e^t\sqrt{1+t^2}\,dt=e^{x^2}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

(5) 设 $\int_1^{y-x^2}e^{t^2}\,dt=\int_0^x\cos(x-t)^2\,dt$ 确定 y 为 x 的函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

6 (1) 求 $\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2}xf(x-t)dt$.

(2) 设 $f(x)$ 连续，且 $g(x)=\int_0^x x^2f(x-t)dt$，求 $g'(x)$.

7 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性.

8 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+b, & x\leqslant0,\\ \ln(1+ax), & x>0\end{cases}$ 处处可导，确定常数 a,b，并求 $f'(x)$.

9 设对一切的 x，有 $f(x+1)=2f(x)$，且当 $x\in[0,1]$ 时 $f(x)=x(x^2-1)$，讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性.

10 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f(0)=0$，令 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq0,\\ f'(0), & x=0.\end{cases}$

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(1) 求 $g'(x)$；(2) 讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

11 求常数 a,b 使得 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+3x)+2a\mathrm{e}^{x}, & x>0,\\ 5\arctan\dfrac{2x}{1-x}+3b(x+1)^{2}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导.

12 设 $f(x)$ 连续，且对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$，$f'(0)=1$，求 $f(x)$.

13 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$f'(0)=1$，且对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x+y)=f(x)f(y)$，求 $f(x)$.

14 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，$M>0$ 且对任意的 $x,y\in[a,b]$，有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^{k}.$$

(1) 证明：当 $k>0$ 时，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；

(2) 证明：当 $k>1$ 时，$f(x)\equiv$ 常数.

三 中值定理与一元函数微分学的应用

入门练习

选择题 答案见解答册037页

1 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{\mathrm{e}^{x^{2}}-1}=2$，则(　　).

(A) $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点　　(B) $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点

(C) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点　　(D) $(0,2)$ 为 $y=f(x)$ 的拐点

2 设 $f'(1)=0$，又 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{(x-1)^{3}}=2$，则(　　).

(A) $x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点　　(B) $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点

(C) $x=1$ 不是 $f(x)$ 的极值点　　(D) $(1,f(1))$ 为 $y=f(x)$ 的拐点

3 设 $f(x)$ 连续二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x^{2}}=2$，则(　　).

(A) $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点　　(B) $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

(C) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点　　(D) $(0,1)$ 为 $y=f(x)$ 的拐点

4 设 $f'(1)=f''(1)=0$，$f'''(1)=3$，则(　　).

(A) $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点

(B) $x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点

(C) $x=1$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(1,f(1))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $(1,f(1))$ 为 $y=f(x)$ 的拐点

5 设 $f'(a)<0$，则存在 $\delta>0$，使得(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=f'(a)$

(B) $f(x)$ 在 $(a-\delta,a+\delta)$ 内单调递减

(C) 当 $x\in(a-\delta,a)$ 时，$f(x)>f(a)$

(D) 当 $x\in(a,a+\delta)$ 时，$f(x)>f(a)$

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

6. 设函数 $y=y(x)$ 由 $y^3-y^2+y+x^2-2x=0$ 确定，则（　　）.

(A) $y=y(x)$ 的极大值点为 $x=1$，极大值为 $y=1$

(B) $y=y(x)$ 的极小值点为 $x=1$，极小值为 $y=1$

(C) $y=y(x)$ 的极大值点为 $x=-1$，极大值为 $y=1$

(D) $y=y(x)$ 的极小值点为 $x=-1$，极小值为 $y=1$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\sin\dfrac{1}{x-1}-\sin\dfrac{1}{x+1}\right)=$（　　）.

(A)1　　(B)-1　　(C)2　　(D)-2

8. 方程 $xe^{-x}=a(a>0)$ 有唯一解，则 $a=$（　　）.

(A) $\dfrac{1}{e}$　　(B) $\dfrac{1}{2e}$　　(C) $\dfrac{2}{e}$　　(D) $\dfrac{2}{3e}$

9. 设 $f''(x)>0$，且 $f(0)=0$，则 $-f(-1)$，$f(1)$，$f'(0)$ 的大小次序为（　　）.

(A) $-f(-1)<f(1)<f'(0)$　　(B) $-f(-1)<f'(0)<f(1)$

(C) $f(1)<-f(-1)<f'(0)$　　(D) $f(1)<f'(0)<-f(-1)$

填空题 ▶答案见解答册 038 页

1. 函数 $f(x)=x^2-3x+4$ 在[1,2]上满足罗尔定理的条件，则中值 $\xi=$_____.

2. 设 $f(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=2$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x-1)]=$_____.

3. 设 $f(x)=\ln(1+x)$，当 $x>0$ 时，由拉格朗日中值定理有 $f(x)=f'(\theta x)x(0<\theta<1)$，则 $\lim\limits_{x\to0^+}\theta=$_____.

4. 曲线 $y=e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$ 的凸区间为_____，拐点为_____.

5. 使得 $x^2\leqslant ae^x$ 在 $(0,+\infty)$ 内恒成立的 a 的最小值为_____.

6. 数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项为_____.

7. 函数 $f(x)=xe^{-2x}$ 的最大值为_____.

8. $y=\dfrac{2x^2+3x+2}{x+1}$ 的斜渐近线为_____.

9. $y=f(x)=\sqrt{4x^2-4x+5}-2x$ 的水平渐近线为_____，斜渐近线为_____.

10. 曲线 $L:\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}(a>0)$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 对应点处的曲率为_____.

解答题 ▶答案见解答册 040 页

1. 设 $f(x)$ 在[0,2]上连续，在(0,2)内可导，且 $f(0)=1$，$f(1)+2f(2)=3$，证明：存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)=0$.

2. 设 $f(x)$ 二阶可导，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x}=0$ 且 $f(1)=1$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$.

3. 设 $f(x)$ 在[a,b]上连续，在(a,b)内可导($a>0$)，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)-2f(\xi)=0.$$

5 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0.$$

6 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上可导且 $|f'(x)|\leqslant M$，又 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内至少有一个零点，证明：

$$|f(0)|+|f(2)|\leqslant 2M.$$

7 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\arctan x}{x\ln^2(1+2x)}$.

8 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}-1+\frac{x^2}{2}}{\tan^2 x-x^2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$.

9 证明：当 $0<x\leqslant 1$ 时，$\ln(1+x)>\dfrac{x}{2}$.

10 证明：当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

11 证明：$e^x\geqslant 1+x$.

12 讨论方程 $\ln x=\dfrac{x}{e}-1$ 的根的个数.

13 当 $x>0$ 时，方程 $kx+\dfrac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个根，求 k 的取值范围.

14 求 $y=\dfrac{2x^2+3x+1}{x+1}e^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线.

基础练习

选择题 答案见解答册043页

1 设 $f(x)=\arcsin x$，对 $a\neq 0$ 有 $f(a)=f'(a\theta)a$，则 $\lim\limits_{a\to 0}\theta=$（　　）.

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(C) $\dfrac{1}{3}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2 设 $f'(x)<f(x)$，且 $f(0)=1$，则（　　）.

(A) $f(-1)<\dfrac{1}{e}$，$f(1)<e$　　(B) $f(-1)>\dfrac{1}{e}$，$f(1)>e$

(C) $f(-1)>\dfrac{1}{e}$，$f(1)<e$　　(D) $f(-1)<\dfrac{1}{e}$，$f(1)>e$

3 设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x^2}=-2$，则（　　）.

(A) $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导　　(B) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)\neq 0$

(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极小值　　(D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极大值

4 设 $f'(0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{\ln^3(1+x)}=2$，则（　　）.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(A)$f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值　(B)$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
(C)$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值　(D)$(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

5 设 $f(x)$ 二阶连续可导，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f''(x)}{\sin^3\pi x}=2$，则(　　).
(A)$x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点
(B)$x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点
(C)$(1,f(1))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
(D)$x=1$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(1,f(1))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

6 设 $f(x)$ 二阶连续可导，$f'(0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|+x^3}=-1$，则(　　).
(A)$x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点
(B)$x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点
(C)$(0,f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点
(D)$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

7 设函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$，其中 $\Delta x<0$，则(　　).
(A)$\Delta y>\mathrm{d}y>0$　(B)$\Delta y<\mathrm{d}y<0$
(C)$\mathrm{d}y>\Delta y>0$　(D)$\mathrm{d}y<\Delta y<0$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

8 当 $x\in[0,1]$ 时，$f''(x)>0$，则 $f'(0)$，$f'(1)$，$f(1)-f(0)$ 的大小次序为(　　).
(A)$f'(0)>f(1)-f(0)>f'(1)$　(B)$f'(0)<f'(1)<f(1)-f(0)$
(C)$f'(0)>f'(1)>f(1)-f(0)$　(D)$f'(0)<f(1)-f(0)<f'(1)$

9 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，$f''(x)<0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内(　　).
(A) 单调递增且大于零　(B) 单调递增且小于零
(C) 单调递减且大于零　(D) 单调递减且小于零

10 设曲线 $y=x^2+ax+b$ 与曲线 $2y=xy^3-1$ 在点 $(1,-1)$ 处的切线相同，则(　　).
(A)$a=1,b=1$　(B)$a=-1,b=-1$
(C)$a=2,b=1$　(D)$a=-2,b=-1$

11 设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)>0$，则下列正确的是(　　).
(A)$f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值　(B)$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
(C)$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　(D)$(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

12 设 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处有极小值 -2，则(　　).
(A)$a=1,b=2$　(B)$a=-1,b=-2$
(C)$a=0,b=-3$　(D)$a=0,b=3$

13 设 $f(x),g(x)(a<x<b)$ 为大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当 $a<x<b$ 时，有(　　).
(A)$f(x)g(b)>f(b)g(x)$　(B)$f(x)g(a)>f(a)g(x)$
(C)$f(x)g(x)>f(b)g(b)$　(D)$f(x)g(x)>f(a)g(a)$

填空题 ▶答案见解答册 045 页

1 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x-1)]=$_____.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

2 设 $f(x)=\ln(1+x)$，对 $a>0$，$f(a)=f'(a\theta)a$，则 $\lim\limits_{a\to0^+}\theta=$_____.

3 使得不等式 $3x^2+Ax^{-3}\geqslant20(x>0)$ 恒成立的 A 的最小值为_____.

4 $f(x)=x^3-3x+k$ 有两个不同的零点，则 $k=$_____.

5 曲线 $y=\int_0^x e^{-t^2}dt$ 的水平渐近线为_____.

6 $y=\dfrac{x^2+1}{x}e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线为_____.

7 曲线 $L:\begin{cases}x=\sin t,\\ y=\cos t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的曲率为_____.

解答题 答案见解答册 047 页

1 设 $f(x)\in C[0,2]$，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(0)=1$，$f(1)=2$，$f(2)=-1$，证明：存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)=0$.

2 设 $f(x)\in C[0,3]$，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+2f(1)=2f(2)+f(3)$，证明：存在 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

3 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，连接端点 $A(0,f(0))$、$B(1,f(1))$ 的线段交曲线 $y=f(x)$ 于点 $C(c,f(c))(0<c<1)$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$.

4 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=0$，又 $f(2)=1$，证明：存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $f''(\xi)=0$.

5 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，又 $f(1)=1$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$.

6 证明方程 $e^x=-x^2+ax+b$ 不可能有三个不同的根.

7 设 $f(x)\in C[0,1]$，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi.$$

8 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)+2f(\xi)g'(\xi)=0$.

9 设 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导 $(a>0)$，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)+2\xi f(\xi)=0$.

10 设 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导 $(a>0)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=(1+\xi)f'(\xi)\ln\frac{1+b}{1+a}.$$

11 设 $0<a<b$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $ae^b-be^a=(a-b)(1-\xi)e^{\xi}$.

12 设 $f(x)\in C[1,2]$，在 $(1,2)$ 内可导，且 $f(1)=0$，证明：存在 $\xi\in(1,2)$，使得

$$4f(2)=\xi^2f(\xi)+\xi^3f'(\xi).$$

13 设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，证明：存在 $\xi\in(1,2)$，使得

$$\xi f'(\xi)-f(\xi)=f(2)-2f(1).$$

14 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\neq0$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

15 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)$，证明：存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，使得

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

$$f'(\xi)+f'(\eta)=0.$$

16 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，$f(a)=f(b)$，且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒为常数. 证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)>0,f'(\eta)<0$.

17 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导$(a>0)$. 证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta).$$

18 设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且 $f'(x)\neq 0$，证明：存在 $\xi,\eta,\zeta\in(1,2)$，使得

$$\frac{f'(\zeta)}{f'(\xi)}=\frac{\xi}{\eta}.$$

19 设 $f''(x)>0$，且 $f(0)=0$，对 $0<a<b$，证明：$f(a)+f(b)<f(a+b)$.

20 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上可导，且 $|f'(x)|\leqslant M$，又 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内至少有一个零点，证明：

$$|f(0)|+|f(2)|\leqslant 2M.$$

21 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$|f''(x)|\leqslant M$，又 $f(x)$ 在 (a,b) 内能取到最小值，证明：

$$|f'(a)|+|f'(b)|\leqslant M(b-a).$$

22 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可导且 $f(0)=f(1)$，又 $|f''(x)|\leqslant M$，证明：$|f'(x)|\leqslant\frac{M}{2}$.

23 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导且 $f''(x)>0$，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 内为凹函数.

24 证明：当 $x>1$ 时，$\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}>\dfrac{x}{1+x}$.

25 证明：当 $x>0$ 时，$x^2>(1+x)\ln^2(1+x)$.

26 证明：当 $x>0$ 时，$\arctan x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\pi}{2}$.

27 证明：当 $0<x<1$ 时，$\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}<\dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$.

28 证明：当 $0<x<1$ 时，$e^{-2x}>\dfrac{1-x}{1+x}$.

29 证明：当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x$.

30 证明：当 $x>0$ 时，$\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>\dfrac{1}{x+1}$.

31 设 PQ 为抛物线 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 的弦，且 PQ 在此抛物线过点 P 的法线上，求 PQ 长度的最小值.

32 求函数 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调区间与极值，并求该曲线的渐近线.

33 求 $f(x)=\int_0^1|x-t|\,dt$ 在 $[0,1]$ 上的最大值与最小值.

34 讨论方程 $\ln x=\dfrac{x}{e}-2$ 的根的个数.

35 设 $0<a<1$，证明：方程 $\arctan x=ax$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个实根.

36 讨论方程 $ke^x=x-2$ 的根的个数.

37 求曲线 $y=f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}e^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

38 求曲线 $y=(2x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线.

四 不定积分

入门练习

填空题 答案见解答册 054 页

1 (1) $\int x\cdot 2^{x^2}\mathrm{d}x=$_____. (2) $\int \frac{x}{4+x^4}\mathrm{d}x=$_____.

(3) $\int x^2\sqrt{2+x^3}\,\mathrm{d}x=$_____.

2 (1) $\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\tan\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=$_____. (2) $\int \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}\mathrm{d}x=$_____.

3 (1) $\int \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$_____. (2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}=$_____.

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}=$_____.

4 (1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}=$_____. (2) $\int \frac{(\ln\ln x)^2\mathrm{d}x}{x\ln x}=$_____.

(3) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}x=$_____.

5 (1) $\int \mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=$_____. (2) $\int \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{4+\mathrm{e}^{2x}}=$_____.

(3) $\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x=$_____.

6 (1) $\int \frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x=$_____. (2) $\int \frac{x}{(2x+3)^2}\mathrm{d}x=$_____.

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}=$_____.

7 (1) $\int \sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x=$_____. (2) $\int \frac{\cos x-\sin x}{(\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x=$_____.

(3) $\int \frac{\sin 2x}{4+\sin^4 x}\mathrm{d}x=$_____. (4) $\int \tan^4 x\,\mathrm{d}x=$_____.

(5) $\int \tan^3 x\sec x\,\mathrm{d}x=$_____.

8 (1) $\int x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=$_____. (2) $\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x=$_____.

(3) $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x=$_____.

9 (1) $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x=$_____. (2) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\cdot\arctan x\,\mathrm{d}x=$_____.

10 $\int \mathrm{e}^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x=$_____.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

解答题 ▶答案见解答册 056 页

1. 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^3+2)}$.

(2) $\int \frac{x+1}{x^2+4}\mathrm{d}x$.

(3) $\int \frac{x+1}{(3x+1)^2}\mathrm{d}x$.

(4) $\int \frac{x+2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$.

2. 计算下列不定积分.

(1) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$.

(2) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$.

3. 计算下列不定积分.

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$.

(2) $\int \frac{\cos^2 x\,\mathrm{d}x}{1+\cos x}$.

(3) $\int \frac{1+\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

4. 计算下列不定积分.

(1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

(2) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$.

5. 计算下列不定积分.

(1) $\int \frac{4x^3+3x+3}{(2x+1)^2}\mathrm{d}x$.

(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}$.

(3) $\int \frac{x^3-1}{x^2+x}\mathrm{d}x$.

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}$.

6. 设 $\frac{\sin x}{x}$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int f'(2x-1)\mathrm{d}x$.

基础练习

填空题 ▶答案见解答册 059 页

1. $\int x\tan^2(x^2+1)\mathrm{d}x =$ _____.

2. $\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+5}\mathrm{d}x =$ _____.

3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+x^2}} =$ _____.

4. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^4 x+1}}\mathrm{d}x =$ _____.

5. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x =$ _____.

6. $\int \frac{x+1}{x(1+x\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x =$ _____.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

7 $\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}dx=$_____.

8 $\int \frac{\arctan e^x}{e^x}dx=$_____.

9 $\int \frac{dx}{2x^2-x-1}=$_____.

10 $\int \frac{2x+1}{x(1+x^2)}dx=$_____.

11 $\int e^{\sqrt{x}}dx=$_____.

12 $\int x\tan^2 x\,dx=$_____.

13 $\int \frac{\sin 2x}{1+4\cos^4 x}dx=$_____.

14 $\int x\ln(1+x)dx=$_____.

解答题 答案见解答册060页

1 计算下列不定积分.

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-4x)}}$.

(2) $\int \frac{\cos\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}dx$.

(3) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.

(4) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

2 计算下列不定积分.

(1) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{2\arctan x+3}}$.

(2) $\int \frac{(x+1)\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

(3) $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

(4) $\int \frac{\cos 2x}{(3+\sin x\cos x)^2}dx$.

(5) $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$.

(6) $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

3 计算下列不定积分.

(1) $\int \frac{12x+9}{2x^2-3x-9}dx$.

(2) $\int \frac{x+3}{x^2+2x+5}dx$.

(3) $\int \frac{dx}{x(x^4+3)}$.

(4) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

4 计算下列不定积分.

(1) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+4}}dx$.

(2) $\int \frac{e^x+1}{\sqrt{e^x-1}}dx$.

(3) $\int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{4x}+e^{2x}+1}dx$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

5 计算下列不定积分.

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}(x>1)$.

(2) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\mathrm{d}x$.

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

6 计算下列不定积分.

(1) $\int \frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x$.

(2) $\int \frac{1}{2+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

(3) $\int \frac{\sin x+\cos^2 x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$.

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^4 x}$.

7 计算下列不定积分.

(1) $\int x\arcsin x\,\mathrm{d}x$.

(2) $\int \arcsin^2 x\,\mathrm{d}x$.

(3) $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

(4) $\int \frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$.

(5) $\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

(6) $\int x\tan x\sec^4 x\,\mathrm{d}x$.

8 计算下列不定积分.

(1) $\int \sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$.

(2) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x$.

(3) $\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

(4) $\int \ln(1+\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$.

五 定积分及应用

入门练习

选择题 答案见解答册 065 页

1 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}=$(　　).

(A) $\frac{\pi}{4}$　　(B) $\frac{\pi}{3}$　　(C) $\frac{\pi}{2}$　　(D) π

2 设 $f(x)$ 连续,且 $f(0)=0, f'(0)=2$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{3x} f(x-t)\mathrm{d}t}{x^2}=$(　　).

(A) 3　　(B) -3　　(C) 2　　(D) -2

3 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\int_x^{2x} t\mathrm{e}^{-(x-t)^2}\mathrm{d}t=$(　　).

(A) $x\mathrm{e}^{-x^2}$　　(B) $-x\mathrm{e}^{-x^2}$　　(C) $-4x^2\mathrm{e}^{-x^2}$　　(D) $3\mathrm{e}^{-x^2}-4x^2\mathrm{e}^{-x^2}$

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

4 下列反常积分收敛的是(　　).

(A)$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x^2-2x|}}$　　(B)$\int_0^1\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x-x^2}\sin x}\mathrm{d}x$

(C)$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x^3-x|}}$　　(D)$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}}$

5 下列反常积分收敛的是(　　).

(A)$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x-1)}$　　(B)$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

(C)$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}}$　　(D)$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$

填空题 ▶答案见解答册067页

1 $\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^4}\,\mathrm{d}x=$_____.

2 $\int_0^4\frac{x-1}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=$_____.

3 $\int_0^1\frac{x+1}{(2x+1)^2}\mathrm{d}x=$_____.

4 设$f(x)=\begin{cases}x\sin\pi x, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{1+\cos\frac{\pi}{2}x}, & 0<x\leqslant 1,\end{cases}$则$\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x=$_____.

5 (1)$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x}=$_____.

(2)$\int_{-1}^1(x^2\sin x+x^2\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x=$_____.

6 (1)$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x=$_____.

(2)$\int_{-\pi}^{\pi}(x+|x|)\sin x\,\mathrm{d}x=$_____.

7 (1)$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}=$_____.

(2)$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}=$_____.

8 (1)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=$_____.

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}\mathrm{e}^{\frac{i}{n}}=$_____.

9 设$f(x)$连续,则$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=$_____.

10 设$f(x)$连续且$f(0)=0,f'(0)=3$,则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{x-\ln(1+x)}=$_____.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^{-t^2}dt - x}{\tan x - \sin x} =$ _____.

12. $\int_0^1 \arctan\sqrt{x}\,dx =$ _____.

13. $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx =$ _____.

14. 设 $L:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，则 L 绕 x 轴和 y 轴旋转一周的几何体体积分别为 $V_x =$ _____，$V_y =$ _____.

解答题 答案见解答册 069 页

1. 计算 $\int_1^2 \dfrac{dx}{\sqrt{x}(4+x)}$.

2. 计算 $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^4 x + x\cos^2 x)dx$.

3. 计算 $\int_{-1}^{1}(x^2+\sin^3 x)\sqrt{1-x^2}\,dx$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

4. (1) 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，证明：$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]dx$；

   (2) 计算 $\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+e^x}dx$.

5. (1) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：$\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$.

   (2) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

   (3) 计算 $\int_{-\pi}^{\pi}(x+|x|)\sin^4 x\,dx$.

6. 设 $f(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt$，求 $\int_0^1 x^2 f(x)dx$.

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]dx$.

9. 判断广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$ 的敛散性，若收敛求其值.

10. 计算下列广义积分.

    (1) $\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x^2}dx$.　　(2) $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

11. 求椭圆 $L:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的面积.

12. 设曲线 $L:y=\sqrt{2x-x^2}$ 与 x 轴围成区域 D.

    (1) 求区域 D 的面积；

    (2) 求区域 D 绕 x 轴旋转一周而成的几何体的体积；

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(3) 求区域 D 绕 $x=2$ 旋转一周所得的几何体的体积.

基础练习

选择题 ▶答案见解答册 072 页

1. 设 $I=\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x, J=\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{1+x}\mathrm{d}x, K=\int_0^1 \ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$,则(　　).

(A) $I<J<K$　　(B) $J<I<K$

(C) $I<K<J$　　(D) $K<I<J$

2. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\mathrm{d}x, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x+\cos^4 x)\mathrm{d}x, P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2\sin^3 x-\cos^4 x)\mathrm{d}x$,则有(　　).

(A) $N<P<M$　　(B) $M<P<N$

(C) $N<M<P$　　(D) $P<M<N$

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-x, & 1<x\leqslant 2, \end{cases} F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\ (x\in[0,2])$,则(　　).

(A) $F(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ \frac{1}{3}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$

(B) $F(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ -\frac{7}{6}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ \frac{x^3}{3}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$

(D) $F(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$

4. 设 $f(x)$ 连续,且 $\varphi(x)=\int_{x-\ln x}^{\mathrm{e}^x} f(x-t)\mathrm{d}t$,则 $\varphi'(x)=$(　　).

(A) $f(\ln x)-f(x-\mathrm{e}^x)$　　(B) $f(x-\mathrm{e}^x)-f(\ln x)$

(C) $\frac{1}{x}f(\ln x)-(1-\mathrm{e}^x)f(x-\mathrm{e}^x)$　　(D) $(1-\mathrm{e}^x)f(x-\mathrm{e}^x)-\frac{1}{x}f(\ln x)$

5. 设 f 连续且 $I=\int_0^{uv} \frac{x}{u^2}f(v^2+\frac{x^2}{u^2})\mathrm{d}x$,则 I(　　).

(A) 与 u,v 都有关　　(B) 与 u,v 都无关

(C) 与 u 有关,与 v 无关　　(D) 与 u 无关,与 v 有关

6. 设 $f(x)$ 为连续函数,则下列为偶函数的是(　　).

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(A)$\int_a^x f(t^2)\mathrm{d}t$　　(B)$\int_a^x [f(-t)+f(t)]\mathrm{d}t$

(C)$\int_a^x [f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$　　(D)$\int_a^x f(x-t)\mathrm{d}t$

7 下列广义积分发散的是(　　).

(A)$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$　　(B)$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

(C)$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$　　(D)$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$

8 下列反常积分收敛的是(　　).

(A)$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$　　(B)$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$

(C)$\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x}(x+2)}\mathrm{d}x$　　(D)$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3-x}}$

9 设在区间$[a,b]$上,$f(x)>0$,$f'(x)<0$,$f''(x)>0$,令$S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,$S_2=f(b)(b-a)$,$S_3=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$,则(　　).

(A)$S_1<S_2<S_3$　　(B)$S_2<S_1<S_3$

(C)$S_3<S_1<S_2$　　(D)$S_2<S_3<S_1$

10 曲线$y=x(x-1)(2-x)$与x轴所围成的图形面积可表示为(　　).

(A)$-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

(B)$\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x-\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

(C)$-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

(D)$\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

11 双纽线$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$所围成的区域面积可表示为(　　).

(A)$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\mathrm{d}\theta$　　(B)$4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\mathrm{d}\theta$

(C)$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta$　　(D)$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\theta)^2\mathrm{d}\theta$

12 设$f(x)$,$g(x)$在区间$[a,b]$上连续,且$g(x)<f(x)<m$,则由曲线$y=g(x)$,$y=f(x)$及直线$x=a$,$x=b$所围成的平面区域绕直线$y=m$旋转一周所得旋转体体积为(　　).

(A)$\pi\int_a^b [2m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$

(B)$\pi\int_a^b [2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$

(C)$\pi\int_a^b [m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(D)$\pi\int_a^b[m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$

13 在曲线$y=(x-1)^2$上的点(2,1)处作曲线的法线,由该法线、x轴及该曲线所围成的区域为$D(y>0)$,则区域D绕x轴旋转一周所成的几何体的体积为(　　).

(A)$\frac{\pi}{5}$　　(B)$\frac{2\pi}{3}$　　(C)$\frac{8\pi}{15}$　　(D)$\frac{13\pi}{15}$

14 矩形闸门宽a米,高h米,垂直放在水中,上边与水面相齐,闸门压力为(　　).

(A)$\rho g\int_0^h ah\,\mathrm{d}h$　　(B)$\rho g\int_0^a ah\,\mathrm{d}h$

(C)$\rho g\int_0^h \frac{1}{2}ah\,\mathrm{d}h$　　(D)$2\rho g\int_0^h ah\,\mathrm{d}h$

填空题 答案见解答册074页

1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\sqrt{1+t\cos t}\,\mathrm{d}t-\int_0^x\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t}{x^4}=$_____.

2 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x\cdot\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}{\arcsin x-x}=$_____.

3 设$f(x)$连续,且$f(1)=0$,$f'(1)=\pi$,则$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\int_{\frac{1}{x}}^1 f(xt)\,\mathrm{d}t}{\ln^2 x}=$_____.

4 设$f(x)$连续,则$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-x}^x[f(t+x)-f(t-x)]\mathrm{d}t=$_____.

5 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{i}{n^2+i}\sin^2\dfrac{\pi(i-1)}{n}=$_____.

6 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}\,\mathrm{d}x=$_____.

7 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}=$_____.

8 $\int_0^1\dfrac{\arctan x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=$_____.

9 $\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=$_____.

10 设$f(x)=\int_1^{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$,则$\int_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$_____.

11 设$f(x)=\int_1^x\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$,则$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=$_____.

12 设区域D由$y=\sqrt{2x-x^2}$与x轴围成,则D绕$x=3$旋转所得旋转体的体积为_____.

13 设区域D由$y=\sqrt{1-x^2}$与x轴围成,则D绕$y=1$旋转一周而成的旋转体的体积为_____.

14 楼高100米,一钢丝绳从楼顶放到楼底,每米受力20牛,从楼底将绳子拉到楼顶,则拉力做功为_____.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

解答题 答案见解答册 077 页

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1+i^2}{n^3}\sqrt{1-\dfrac{i^2}{n^2}}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\left|\cos\dfrac{\pi i}{n}+\sin\dfrac{\pi i}{n}\right|}{n}$.

2. 计算下列定积分.

(1) $\int_0^{\pi^2}(\sin\sqrt{x}+\cos^2\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$.

(2) $\int_0^{\pi}x\sqrt{\sin^2x-\sin^4x}\,\mathrm{d}x$.

(3) $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$.

(4) $\int_0^{\ln 2}\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}\,\mathrm{d}x$.

3. 求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin^7x}{1+x^{10}}+\dfrac{1}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x$.

4. 求 $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}$.

5. 求 $\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

6. 求 $\int_{-1}^{1}(|x|+x)\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x$.

7. 计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\cos x}{2+\sin x}+x^2\sin x\right)\mathrm{d}x$.

8. 求 $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\dfrac{|\ln x|}{x}\mathrm{d}x$.

9. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x}{1+\mathrm{e}^{\sin^2x}}\mathrm{d}x$.

10. 求 $\int_0^1 3x^2\arcsin x\,\mathrm{d}x$.

11. 求 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2+3x^4}}$.

12. 求 $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}\sqrt{(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$.

13. 求 $\int_{-1}^{1}\dfrac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

14. 求 $\int_{-1}^{1}(2+\sin x)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

15. 求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\sin^2x]\cos^2x\,\mathrm{d}x$.

16. 求 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3x}\,\mathrm{d}x$.

17. 计算 $\int_0^1\dfrac{x}{(1+x)^2}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

18. 求 $\int_{-2}^{2}(3x+1)\max\{2,x^2\}\,\mathrm{d}x$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

19 设 $f(x)=\begin{cases}x\sin^2 x, & x>0,\\ \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 求 $\int_0^{2\pi} f(x-\pi)\mathrm{d}x$.

20 设 $f(x)=f(x-\pi)+x\sin^2 x$，且当 $x\in[0,\pi)$ 时，$f(x)=x$，求 $\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

21 设 $f(x)=\int_0^x \dfrac{\cos t}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$.

22 设 $y'=\arctan(x-1)^2$，$y(0)=0$，求 $\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x$.

23 设 $f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{\cos t}\mathrm{d}t$，求 $\int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x$.

24 设 $f(x)=\sin^3 x+\int_{-\pi}^{\pi} xf(x)\mathrm{d}x$，求 $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

25 设 $f(x)\in C[-\pi,\pi]$，且 $f(x)=\dfrac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

26 计算 $\int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1})\mathrm{d}x$.

27 设 $\varphi(x)=\int_0^x (x-t)^2 f(t)\mathrm{d}t$，求 $\varphi'''(x)$，其中 $f(x)$ 为连续函数.

28 设 $f(x)$ 连续，且 $F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)\mathrm{d}t$. 证明：

(1) 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 为偶函数；

(2) 若 $f(x)$ 单调不增，则 $F(x)$ 单调不减.

29 设 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=0$，$f'(0)=4$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t}{x^4}$.

30 求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 的最大值与最小值.

31 判断 $\int_0^1 \dfrac{\sqrt{-\ln x}}{x-1}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

32 判断反常积分 $\int_0^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-x^2}}$ 是否收敛，若收敛求其值.

33 计算 $\int_0^{+\infty} \dfrac{x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x$.

34 计算 $\int_3^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$.

35 计算 $\int_1^{+\infty} \dfrac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$.

36 设 $f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(x)>0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $[a,\xi]$ 上以 $f(\xi)$ 为高的矩形面积等于 $[\xi,b]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积.

37 证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\cos^n x\mathrm{d}x=2^{-n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x$.

38 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$，并求

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

$$I=\int_0^1 \frac{x^2}{x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

【39】设 $f(x)$ 连续且关于 $x=T$ 对称，$a<T<b$. 证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=2\int_T^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x.$$

【40】设 $f(a)=f(b)=0$，$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=1$，$f'(x)\in C[a,b]$.

(1) 求 $\int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x$；

(2) 证明：$\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b x^2f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{4}$.

【41】设 $f(x)$ 连续，证明：$\int_0^x\left[\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t$.

【42】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导，且 $f(0)=0$，证明：$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x$.

【43】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} x^2f(x)\mathrm{d}x$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$$

【44】设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(\xi)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x=g(\xi)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

【45】. 设 $f(t)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，且 $\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x=0$. 证明：存在 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $f'(\xi)=0$.

【46】设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导且 $f''(x)>0$，证明：$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x>2f(1)$.

【47】求曲线 $y=\cos x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 与 x 轴围成的区域分别绕 x 轴、y 轴旋转一周形成的几何体体积.

【48】求由曲线 $y=x^2-2x$，$y=0$，$x=1$，$x=3$ 所围成区域的面积 S，并求该区域绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

【49】设 $L:y=\mathrm{e}^{-x}(x\geqslant0)$.

(1) 求由 $y=\mathrm{e}^{-x}$，x 轴，y 轴及 $x=a(a>0)$ 所围成平面区域绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积 $V(a)$；

(2) 设 $V(c)=\frac{1}{2}\lim\limits_{a\to+\infty}V(a)$，求 c.

【50】设 $y=f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的非负连续函数.

(1) 证明：存在 $c\in(0,1)$，使得在区间 $[0,c]$ 上以 $f(c)$ 为高的矩形面积等于区间 $[c,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积；

(2) 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f'(x)>-\frac{2f(x)}{x}$，证明：(1) 中的 c 是唯一的.

【51】求圆 $x^2+y^2=2y$ 内位于抛物线 $y=x^2$ 上方部分的面积.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

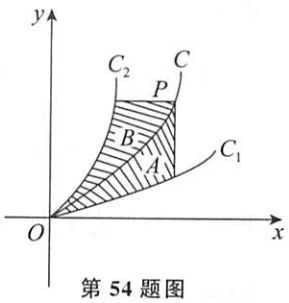
52 设摆线 $L:\begin{cases}x=2(t-\sin t),\\ y=2(1-\cos t)\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与 x 轴围成的区域为 D.

(1) 求区域 D 的面积;

(2) 求区域 D 绕 y 轴旋转而成的几何体的体积.

53 抛物线 $y^2=2x$ 把圆 $x^2+y^2=8$ 分成两个部分,求左右两个部分的面积之比.

54 设 C_1,C_2 是任意两条过原点的曲线,曲线 C 介于 C_1,C_2 之间,如果过 C 上任意一点 P 引平行于 x 轴和 y 轴的直线,得两块阴影如图所示区域,记为 A,B,它们有相等的面积,设 C 的方程是 $y=x^2$,C_1 的方程是 $y=\frac{1}{2}x^2$,求曲线 C_2 的方程.



第 54 题图

55 设曲线 $y=a+x-x^3$,其中 $a<0$. 当 $x>0$ 时,该曲线在 x 轴下方与 y 轴、x 轴所围成图形的面积和在 x 轴上方与 x 轴所围成图形的面积相等,求 a.

56 曲线 $y=(x-1)(x-2)$ 和 x 轴围成平面图形,求此平面图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积.

57 设平面图形 D 由 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 与 $y\geqslant x$ 围成,求图形 D 绕直线 $x=2$ 旋转一周所成的旋转体的体积.

58 求曲线 $y=3-|x^2-1|$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y=3$ 旋转一周所得的旋转体的体积.

59 求由曲线 $y=4-x^2$ 与 x 轴围成的部分绕直线 $x=3$ 旋转一周所成的几何体的体积.

60 过曲线 $y=x^2(x\geqslant 0)$ 上某点处作切线,使该曲线、切线与 x 轴所围成的面积为 $\frac{1}{12}$,求切点坐标、切线方程,并求此图形绕 x 轴旋转一周所成几何体的体积.

61 曲线 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{4-a}}=1(0<a<4)$ 与 x 轴、y 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周所得立体体积为 $V_1(a)$,绕 y 轴旋转一周所得立体体积为 $V_2(a)$,问 a 为何值时,$V_1(a)+V_2(a)$ 最大,并求最大值.

62 设一抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点 $(0,0)$ 与 $(1,2)$,且 $a<0$,确定 a,b,c,使得抛物线与 x 轴所围图形的面积最小.

63 设直线 $y=kx$ 与曲线 $y=\sqrt{x}$ 所围平面图形为 D_1,它们与直线 $x=1$ 围成平面图形为 D_2.

(1) 求 k,使得 D_1 与 D_2 分别绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积 V_1 与 V_2 之和最小,并求最小值;

(2) 求(1)中条件成立时的 $S_{D_1+D_2}$.

64 设曲线 $y=\sqrt{x-1}$,过原点作曲线的切线,求此曲线、切线及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的表面积.

65 求摆线 $x=t-\sin t,y=1-\cos t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的长度.

66 一半径为 R 的球沉入水中,球面顶部正好与水面相切,球的密度为 1,求将球从水中取出所做的功.

67 半径为 2 的球体盛满水,求将水从球顶部全部抽出所做的功.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

六 多元函数微分学

入门练习

填空题 答案见解答册 089 页

1 (1)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sqrt{1+xy}-\sqrt{1-xy}}{x}=$_____.

(2)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(\cos xy^2)^{\frac{1}{\ln^2(1+x)}}=$_____.

2 (1) 设 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$_____.

(2) 设 $z=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$,则$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$_____.

3 设 $z=xyf(x^2+y^2)$,其中 f 连续可导,则$\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=$_____.

4 设 $z=f(t^2,\sin t)$,其中 f 二阶连续可偏导,则$\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=$_____.

5 设 $z=f(x+y,xy)$,其中 f 二阶连续可偏导,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$_____.

6 设 $z=\varphi(x,y)$ 及 $y+z=\varphi(x+z)$,其中 φ 连续可导,则$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=$_____.

7 设 $xz+\mathrm{e}^z=yz$ 确定 $z=z(x,y)$,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$_____.

8 设$z=f(x,y)$满足:$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x$,$f'_x(x,0)=2\cos x$,$f(0,y)=\mathrm{e}^y+1$,则$f(x,y)=$_____.

9 设 $z=f(x,y)$ 连续且$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-2x+y}{(x-1)^2+y^2}=0$,则 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,0)}=$_____.

10 设 $z=2x^2-y^2+2$ 在区域 $D:x^2+4y^2\leqslant 4$ 上的最小值和最大值为_____.

11 设 $x+y+z+\mathrm{e}^{xyz}=0$ 确定函数 $z=z(x,y)$,则 $\mathrm{d}z\big|_{(1,0)}=$_____.

解答题 答案见解答册 091 页

1 设 $z=f(t^2,\mathrm{e}^{2t})$,其中 f 二阶连续可偏导,求$\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$.

2 设 $z=f(\mathrm{e}^x\sin y,xy)$,其中 f 二阶连续可偏导,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3 设 $u=f(x^2,xy,xy^2z)$,其中 f 连续可偏导,求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$,$\dfrac{\partial u}{\partial y}$,$\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

4 设 $z=f(x,y)$ 在点(1,1)处可微,$f(1,1)=1$,$f'_1(1,1)=a$,$f'_2(1,1)=b$,又 $u=f[x,f(x,x)]$,求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1}$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

5 设 $z=\int_{x+y}^{xy} e^{-t^2}dt$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

6 设 $y=y(x),z=z(x)$ 由 $\begin{cases}x^2+y^2=2z,\\ x+y-z+1=0\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{dz}{dx}$.

7 设 $z=z(x,y)$ 是由 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 所确定的二元函数，其中 F 连续可偏导，求

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}.$$

8 求二元函数 $z=f(x,y)=x^3-3x^2-9x+y^2-2y+2$ 的极值.

9 设 $z=f(x,y)$ 满足：$dz=2xdx-4ydy$ 且 $f(0,0)=5$.

(1) 求 $f(x,y)$；

(2) 求 $f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+4y^2\leqslant 4\}$ 上的最小值和最大值.

10 设 $z=z(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=(x+y)z$，令 $w=\ln z+x+y$，将等式化为 w 关于 x,y 的方程.

基础练习

选择题 ▶答案见解答册093页

1 设 $z=f(x,y)$ 连续可偏导，且 $\dfrac{\partial z}{\partial x}>0,\dfrac{\partial z}{\partial y}<0$，若 $x_1<x_2,y_1>y_2$，则(　　).

(A) $f(x_1,y_1)>f(x_2,y_2)$　　(B) $f(x_1,y_2)>f(x_2,y_1)$

(C) $f(x_2,y_1)>f(x_1,y_2)$　　(D) $f(x_2,y_2)>f(x_1,y_1)$

2 设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^4}$，则(　　).

(A) $f(x,y)$ 在(0,0)处对 x 对 y 都不可偏导

(B) $f(x,y)$ 在(0,0)处对 x 对 y 都可偏导

(C) $f(x,y)$ 在(0,0)处对 x 可偏导，对 y 不可偏导

(D) $f(x,y)$ 在(0,0)处对 x 不可偏导，对 y 可偏导

3 设 $f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0)$ 都存在，则(　　).

(A) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续　　(B) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在

(C) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微　　(D) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)$ 存在

4 设 $f(x,y)$ 连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-3}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}=2$，则(　　).

(A) $f(1,1)$ 为极大值　　(B) $f(1,1)$ 为极小值

(C) $f(1,1)$ 不是极值　　(D) $f(1,1)$ 是否为极值不确定

5 设 $f(x,y)$ 在点(0,0)的某去心邻域内连续，且满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+1-x\sin y}=-3$，则函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)处(　　).

(A) 取极大值　　(B) 取极小值

(C) 不取极值　　(D) 无法确定是否有极值

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

6. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则(　　).

(A) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续,但不可偏导

(B) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续,但可偏导

(C) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续且可偏导,但不可微

(D) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

7. 设 $f(x,y)=\begin{cases}y\cdot\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处(　　).

(A) 不连续　　(B) 连续,但不可偏导

(C) 可偏导,但不可微　　(D) 可微

8. 设 $F(x,y,z)$ 连续可偏导,$F'_y\cdot F'_z\neq 0$,且 $F(1,1,-2)=0$,则在点 $(1,1,-2)$ 邻域内,由 $F(x,y,z)=0$(　　).

(A) 既可确定 x 为 y,z 的二元函数,也可确定 y 为 x,z 的二元函数

(B) 既可确定 x 为 y,z 的二元函数,也可确定 z 为 x,y 的二元函数

(C) 既可确定 y 为 x,z 的二元函数,也可确定 z 为 x,y 的二元函数

(D) 可确定 x 为 y,z 的二元函数、y 为 x,z 的二元函数、z 为 x,y 的二元函数

9. 设 $u=f(x+y,xz)$ 有二阶连续的偏导数,则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=$(　　).

(A) $f'_2+xf''_{11}+(x+z)f''_{12}+xzf''_{22}$　　(B) $xf''_{12}+xzf''_{22}$

(C) $f'_2+xf''_{12}+xzf''_{22}$　　(D) xzf''_{22}

10. $z=f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值点和极值分别为(　　).

(A) 极大值点为 $\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$,极大值为 $-\dfrac{e}{2}$

(B) 极大值点为 $\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$,极大值为 $\dfrac{e}{2}$

(C) 极小值点为 $\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$,极小值为 $-\dfrac{e}{2}$

(D) 无极值点和极值

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

11. 设可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得极小值,则下列结论正确的是(　　).

(A) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数为零　　(B) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数大于零

(C) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数小于零　　(D) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数不存在

12. 设 $u=u(x,y)$ 在包含有界闭区域 D 的区域内具有二阶连续偏导数,在 D 内有 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$,则(　　).

(A) $u=u(x,y)$ 的最大值和最小值在 D 内取到

(B) $u=u(x,y)$ 的最大值和最小值在 D 的边界上取到

(C) $u=u(x,y)$ 的最大值在 D 的边界上取到,最小值在 D 内取到

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(D)$u=u(x,y)$ 的最小值在 D 的边界上取到,最大值在 D 内取到

填空题 ▶答案见解答册095页

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1-x^2y)^{\frac{\ln y}{x-\ln(1+x)}}=$_____.

2. 设 $z=\ln(x^2+y^2)$,则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$_____.

3. 设 $z=x^{\sin^2 y}+e^{\tan\frac{y}{x}}$,则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$_____.

4. 设函数 $f(x,y)$ 可导,且 $f(1,-1)=-1$,$f'_1(1,-1)=2$,$f'_2(1,-1)=3$,又 $F(x)=f[x^2,f(x^2,x^3)]$,则 $F'(-1)=$_____.

5. 已知 $x=ze^{y+z}$ 确定函数 $z=z(x,y)$,则 $dz\Big|_{(e,0)}=$_____.

6. 设 $e^{x^2+yz}=x^2+y^2+z$ 确定函数 $z=z(x,y)$,则 $dz=$_____.

7. 设 $z=f(x,y)$ 是由 $e^{2yz}+x+y^2+z=\dfrac{7}{4}$ 确定的隐函数,则 $dz\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=$_____.

8. 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 在点(1,0,−1)处的微分为 $dz=$_____.

9. 设 $f(x,y,z)=e^xyz^2$,其中 $z=z(x,y)$ 是由 $x+y+z+xyz=0$ 确定的隐函数,则 $f'_x(0,1,-1)=$_____.

10. 设 $z=\dfrac{y}{x}f(xy)+yg(x^2+y^2)$,其中 f,g 二阶连续可导,则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$_____.

11. 设 $z=f\left(x^2+y^2,\dfrac{y}{x}\right)$,且 $f(u,v)$ 具有二阶连续的偏导数,则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$_____.

12. 设 $z=f(x+y,y+z,z+x)$,其中 f 连续可偏导,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$_____.

13. 设 $f(x,y)$ 可微,且 $f'_1(-1,3)=-2$,$f'_2(-1,3)=1$,令 $z=f\left(2x-y,\dfrac{y}{x}\right)$,则 $dz\Big|_{(1,3)}=$_____.

解答题 ▶答案见解答册098页

1. 设 $f(x,y)=|x-y|g(x,y)$,其中 $g(x,y)$ 连续且 $g(0,0)\neq 0$,研究 $f(x,y)$ 在(0,0)处的连续性、可偏导性及可微性.

2. 设 $z=yf(x^2-y^2)$,其中 f 可导,证明:$\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$.

3. 设 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)+yg\left(\dfrac{x}{y}\right)$,其中 f,g 二阶可导,证明:$x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

4. 设 $u=f(x+y,x^2+y^2)$,其中 f 二阶连续可偏导,求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

5. 设 $z=f[xg(y),x-y]$,其中 f 二阶连续可偏导,g 二阶可导,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

6 设 $z=f(e^t\sin t,\tan t)$，求 $\dfrac{dz}{dt}$.

7 设 $z=\int_0^{x^2y}f(t,e^t)dt$，$f$ 有一阶连续的偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

8 设 $f(t)$ 二阶可导，$g(u,v)$ 二阶连续可偏导，且 $z=f(2x-y)+g(x,xy)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

9 设 $z=f(e^x\sin y,x^2+y^2)$，且 $f(u,v)$ 二阶连续可偏导，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

10 设 $z=f(x^2+y^2,xy,x)$，其中 $f(u,v,w)$ 二阶连续可偏导，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

11 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2=xyf(z^2)$ 所确定，其中 f 是可微函数，计算 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 并化成最简形式.

12 设 $z=z(x,y)$ 由 $x-yz+ye^{z-x-y}=0$ 确定，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 dz.

13 设 $z=f[x-y+g(x-y-z)]$，其中 f,g 可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

14 设 $u=f(z)$，其中 z 是由 $z=y+x\varphi(z)$ 确定的 x,y 的函数，其中 $f(z)$ 与 $\varphi(z)$ 为可微函数. 证明：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi(z)\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

15 设 $xy=xf(z)+yg(z)$，且 $xf'(z)+yg'(z)\neq 0$，其中 $z=z(x,y)$ 是 x,y 的函数. 证明：

$$[x-g(z)]\frac{\partial z}{\partial x}=[y-f(z)]\frac{\partial z}{\partial y}.$$

16 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的偏导数，$y=y(x)$，$z=z(x)$ 分别由方程 $e^{xy}-y=0$ 与 $e^z-xz=0$ 确定，求 $\dfrac{du}{dx}$.

17 设 $y=y(x)$，$z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数，其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$.

18 设 $y=f(x,t)$，其中 t 是由 $G(x,y,t)=0$ 确定的 x,y 的函数，且 $f(x,t),G(x,y,t)$ 一阶连续可偏导，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

19 设 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 且 F 可微，证明：$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy$.

20 设 $z=z(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，且具有二阶连续偏导数，若变换 $\begin{cases}u=x+ay,\\ v=x+by\end{cases}$ 将该方程化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求常数 a,b.

21 设 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2+\dfrac{xy}{x+y}$，求 $f(u,v)$，并求 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$.

22 设 $z=f(x,y)$ 由 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2-xy$ 确定，求 dz.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

23 求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

24 求函数 $f(x,y)=(x^2+2x+y)e^y$ 的极值.

25 设函数 $z=f(x,y)$ 满足：$f(0,y)=y^2$，$f'_x(x,0)=\cos 2x$，又 $f''_{xy}(x,y)=xe^y+xy$，求 $f(x,y)$.

26 求 $u=x^2+y^2+z^2$ 在 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 上的最小值.

七 重积分

入门练习

选择题 ▶答案见解答册103页

1 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，且 $a>0,b>0$，则 $I=\iint\limits_D\frac{ae^{x^2}+be^{y^2}}{e^{x^2}+e^{y^2}}d\sigma=$（　　）.

(A) $\frac{(a+b)}{4}\pi$　(B) $\frac{(a+b)}{3}\pi$　(C) $\frac{(a+b)}{2}\pi$　(D) $(a+b)\pi$

2 设 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x+y\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，$I=\iint\limits_D\ln^2(1+x+y)dxdy$，$J=\iint\limits_D(e^{x+y}-1)dxdy$，$K=\iint\limits_D(x+y)dxdy$，则（　　）.

(A) $I<K<J$　(B) $I<J<K$　(C) $J<I<K$　(D) $K<I<J$

3 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\csc\theta}r^2\cos\theta f(r)dr=$（　　）.

(A) $\int_0^1 xdx\int_x^1 f(x,y)dy$　(B) $\int_0^1 xdx\int_0^x f(x,y)dy$

(C) $\int_0^1 xdx\int_0^x f(\sqrt{x^2+y^2})dy$　(D) $\int_0^1 xdx\int_x^1 f(\sqrt{x^2+y^2})dy$

4 设 D 是由 $A(\pi,\pi)$、$B(-\pi,\pi)$、$C(-\pi,-\pi)$ 三点构成的三角形区域，则 $\iint\limits_D(xy+\sin x\cos y)dxdy=$（　　）.

(A) $-\pi$　(B) π　(C) $\frac{\pi}{2}$　(D) 0

5 设 $f(u)$ 连续，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}f(t^2-x^2-y^2)dxdy}{t^4}=$（　　）.

(A) $\frac{\pi}{3}$　(B) $\frac{\pi}{2}$　(C) $\frac{2\pi}{3}$　(D) π

填空题 ▶答案见解答册104页

1 (1) $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{(m+i)(n^2+j^2)}=$_____.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{i}{n^3}\sin^2\frac{2\pi j}{n}=$_____.

2 设 $D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$,则$\iint\limits_D[x^2y+y\ln(x+\sqrt{x^2+1})]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_____.

3 设 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$,则$\iint\limits_D\sqrt{|x-y|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_____.

4 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$,则$\iint\limits_D(x+2y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_____.

5 设区域 $D=\{(x,y)\mid -\pi\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant|x|\}$,则$\iint\limits_D(\sin^2x+xy^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_____.

6 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}$,则$\iint\limits_D(x^2+xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_____.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

7 改变积分次序$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}}f(x,y)\mathrm{d}y=$_____.

8 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=$_____.

9 设 $f(u)$ 连续,$f(0)=0$,$f'(0)=1$,且 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2\}(t>0)$,

则$\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\tan t-t}=$_____.

10 设区域 D 由 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 与 x 轴围成,$f(x,y)=xy-\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,则 $f(x,y)=$_____.

解答题 ▶答案见解答册 106 页

1 计算$\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中区域 D 由 $y=x$,$x+y=1$ 及 x 轴围成.

2 设区域 D 由 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x}$ 所围成,求$\iint\limits_D\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

3 求$\iint\limits_D\max\{xy,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

4 设 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}\}$,求$\iint\limits_D|x-y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

5 设区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$,求$\iint\limits_D\sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

6 设 D 由 $x^2+y^2=2x$,计算 $I=\iint\limits_D(x^2+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

7 设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,计算 $I=\iint\limits_D(x-2y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

8 求$\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$.

9 计算$\iint\limits_D\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid x+y\geqslant 1,x^2+y^2\leqslant 1\}$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

10 设函数 $f(u)$ 连续，且 $f(0)=0, f'(0)=2$，求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(\arcsin t-t)\ln(1+2t)}$.

基础练习

选择题 答案见解答册108页

1 设 $D: x^2+y^2\leqslant 16$，则 $\iint\limits_D |x^2+y^2-4|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　　）.

(A) 40π　　(B) 80π　　(C) 20π　　(D) 60π

2 设区域 $D=\{(x,y)\mid (x^2+y^2)^2\leqslant 4(x^2-y^2)\}$，则 $I=\iint\limits_D (x^2-4y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　　）.

(A) $\pi+\dfrac{2}{3}$　　(B) $\pi+\dfrac{4}{3}$　　(C) $\pi+2$　　(D) $\pi+\dfrac{8}{3}$

3 $\int_0^2\mathrm{d}y\int_y^2 y\ln(1+x^3)\mathrm{d}x=$（　　）.

(A) $3\ln 3-\dfrac{4}{3}$　　(B) $3\ln 3+\dfrac{4}{3}$　　(C) $3\ln 3+\dfrac{2}{3}$　　(D) $3\ln 3-\dfrac{2}{3}$

4 设 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=0, f'(0)=4$，则 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(t-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_0^{e^{t^2}-1}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u}=$（　　）.

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　　(B) π　　(C) $\dfrac{3\pi}{2}$　　(D) 2π

5 设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1),(-1,1),(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 为区域 D 位于第一象限的部分，则 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}\sigma=$（　　）.

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　(B) $2\iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　(D) 0

6 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y=$（　　）.

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$

(B) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$

(D) $\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$

7 设 $x^2+y^2\leqslant 2ay\ (a>0)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 在极坐标下的累次积分为（　　）.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(A) $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$

(B) $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2a\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$

(C) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$

(D) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$

8 极坐标下的累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr =$ (　　).

(A) $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$　　(B) $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$

(C) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$　　(D) $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$

9 设区域 D 由 $x=0, y=0, x+y=\frac{1}{2}, x+y=1$ 围成，若

$I_1 = \iint_D [\ln(x+y)]^3 dx\,dy$，$I_2 = \iint_D (x+y)^3 dx\,dy$，$I_3 = \iint_D \sin^3(x+y) dx\,dy$，则(　　).

(A) $I_1 > I_2 > I_3$　　(B) $I_2 > I_3 > I_1$

(C) $I_1 < I_2 < I_3$　　(D) $I_2 < I_3 < I_1$

填空题 ▶答案见解答册 110 页

1 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{2n} \frac{ij}{n^2} \sin^2 \frac{\pi j}{n} =$ _____.

2 设积分区域 D 为 $x^2+4y^2 \leqslant t^2$，又有 $f(x,y)$ 为连续函数且 $f(0,0)=4$，

则 $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}{e^{-t^2}-\cos t} =$ _____.

3 $\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dy =$ _____.

4 设 $f(x) \in C[0,4]$ 且 $\int_0^4 f(x)\,dx = A$，则 $I = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 y f(x) f(y^2)\,dy =$ _____.

5 $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx =$ _____.

6 改变积分次序：$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx =$ _____.

7 设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y) = xy + \iint_D f(x,y)\,d\sigma$，其中 D 由 $y=0, y=x^2$ 及 $x=1$ 围成，

则 $f(x,y) =$ _____.

8 设 $f(x)>0$ 且连续，积分区域 D 为 $x^2+y^2 \geqslant 1$ 与 $x^2+y^2 \leqslant 4$ 所围成的第一象限的部分，对任意的 $a>0, b>0$，有 $\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)} dx\,dy =$ _____.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

9 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$，则$\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_____.

解答题 答案见解答册 111 页

1 改变积分次序$\int_0^a\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{2ax-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

2 改变积分次序$\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{1}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

3 改变积分次序$\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\mathrm{d}y(a>0)$.

4 改变积分次序并计算$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x$.

5 计算$\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^x\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^2\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$.

6 把二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$写成极坐标下的累次积分的形式(先 r 后 θ)，其中 D 由直线 $x+y=1,x=1,y=1$ 围成.

7 把$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$写成极坐标系下的累次积分，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\}$.

8 设 $f(x)$ 连续，$f(0)=1$，令 $F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y(t\geqslant 0)$，求 $F''(0)$.

9 计算 $I=\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由曲线$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$及 x 轴和 y 轴围成，其中 $a>0,b>0$.

10 设 D 是由点 $O(0,0),A(1,2)$ 及 $B(2,1)$ 为顶点构成的三角形区域，计算$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

11 求 $I=\iint\limits_D\frac{x\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$.

12 设 $D=\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2\}$，求 $I=\iint\limits_D(x^2-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

13 求 $I=\iint\limits_D|\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$.

14 计算二重积分$\iint\limits_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D:x^2+y^2\leqslant x+y+1$.

15 计算$\iint\limits_D\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y(a>0)$，其中 D 是由曲线 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}$ 和直线 $y=-x$ 所围成的区域.

16 计算 $I=\iint\limits_D y^2\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $x=-2,y=2,x$ 轴及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 围成.

17 计算$\iint\limits_D(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D:ay\leqslant x^2+y^2\leqslant 2ay(a>0)$.

18 计算$\iint\limits_D xy(x+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x^2-y^2=1$ 及 $y=0,y=1$ 围成的平面区域.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

19 计算$\iint\limits_D(3xy+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $y=x^2$，$y=4x^2$ 及 $y=1$ 围成.

20 设 $f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 求$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x+y\leqslant b\}(0<a<b)$.

21 求$\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D:x^2+y^2\leqslant\pi^2$.

22 求$\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x+y)^2\mathrm{d}y$.

23 求$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

24 计算$\iint\limits_D\sin x^2\cos y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D:x^2+y^2\leqslant a^2(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$.

25 计算$\iint\limits_D\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$.

26 计算$\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4x,0\leqslant y\leqslant x\}$.

八 微分方程

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

入门练习

选择题 答案见解答册 116 页

1 设 $y_1=2x-\mathrm{e}^x$，$y_2=2x+\mathrm{e}^x$ 为 $y'+a(x)y=b(x)$ 的两个特解，则(　　).

(A)$a(x)=1,b(x)=2x$　　(B)$a(x)=-1,b(x)=2x$

(C)$a(x)=-1,b(x)=2-2x$　　(D)$a(x)=-1,b(x)=2+2x$

2 设 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ 为 $y'+a(x)y=b(x)$ 的两个不同的特解，则其通解为(　　).

(A)$C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$　　(B)$C\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$

(C)$C\varphi_1(x)$　　(D)$C[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)]+\dfrac{\varphi_1(x)+\varphi_2(x)}{2}$

3 方程 $y''-y=\mathrm{e}^x+(x+1)\mathrm{e}^{-x}$ 的特解形式为(　　).

(A)$ax\mathrm{e}^x+(Ax+B)\mathrm{e}^{-x}$　　(B)$a\mathrm{e}^x+(Ax+B)\mathrm{e}^{-x}$

(C)$a\mathrm{e}^x+(Ax^2+Bx)\mathrm{e}^{-x}$　　(D)$ax\mathrm{e}^x+(Ax^2+Bx)\mathrm{e}^{-x}$

4 微分方程 $y''-2y'=x\mathrm{e}^{2x}+3x+1$ 的特解形式为(　　).

(A)$x(ax+b)\mathrm{e}^{2x}+x(Ax+B)$　　(B)$(ax+b)\mathrm{e}^{2x}+x(Ax+B)$

(C)$x(ax+b)\mathrm{e}^{2x}+(Ax+B)$　　(D)$(ax+b)\mathrm{e}^{2x}+Ax+B$

填空题 答案见解答册 117 页

1 曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,y)$ 处切线的斜率等于该点坐标之积的两倍，且该曲线过点(0,2)，

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

则 $f(x)=$_____.

2 设函数 $y=y(x)$ 满足 $\Delta y=\frac{xy}{1+x^2}\Delta x+o(\Delta x)$，且 $y(0)=2$，则 $y(x)=$_____.

3 $(1+y^2)\mathrm{d}x-2xy\mathrm{d}y=0(x>0)$ 满足 $y(1)=0$ 的特解为_____.

4 方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2y+x}{x}$ 的通解为_____.

5 设 y_1,y_2 为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ 的两个特解，p,q 为常数，且 py_1-qy_2 为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$ 的解，py_1+qy_2 为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ 的解，则 $p=$_____，$q=$_____.

6 设连续函数 $f(x)$ 满足：$f(x)-\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x$，则 $f(x)=$_____.

7 微分方程 $y''-y'=(2x+1)\mathrm{e}^x+4x-1$ 的通解为_____.

8 设 $y_0=2+3\mathrm{e}^{2x}$ 为 $y''+py'+qy=0$ 的特解，则该微分方程为_____.

9 设 $y_0=\mathrm{e}^x+2x\mathrm{e}^x$ 为 $y''+py'+qy=0$ 的一个特解，则该微分方程为_____.

10 方程 $y''-y'^2=y'$ 的满足 $y(0)=-\ln 2,y'(0)=-\frac{1}{2}$ 的特解为_____.

解答题 答案见解答册 118 页

1 求微分方程 $y'-2xy=\mathrm{e}^{x^2}$ 满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解.

2 设位于第一象限的曲线 $y=f(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 的切线在 x 轴上的截距等于该点法线在 y 轴上截距的相反数，且曲线经过点 $(1,0)$，求该曲线.

3 求下列微分方程的通解：

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x}y=x^2+1$.　　(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2(1+y^2)$.

(3) $x\mathrm{d}y-(y+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x=0(x>0)$.

4 求微分方程 $y''+y'-2y=(2x+1)\mathrm{e}^x-2$ 的通解.

5 设 $f(x)$ 二阶连续可导，且 $f(x)-4\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x$，求 $f(x)$.

6 求微分方程 $y''+y'^2=1$ 满足 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解.

基础练习

选择题 答案见解答册 120 页

1 设 $y_1(x),y_2(x)$ 为一阶非齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，且 $ky_1(x)+ly_2(x)$ 为 $y'+p(x)y=0$ 的特解，$ky_1(x)-2ly_2(x)$ 为 $y'+p(x)y=q(x)$ 的特解，则（　　）.

(A) $k=\frac{1}{3},l=\frac{1}{3}$　　(B) $k=\frac{1}{3},l=-\frac{1}{3}$

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(C)$k=-\frac{1}{3},l=-\frac{1}{3}$　　(D)$k=-\frac{1}{3},l=\frac{1}{3}$

2 以 $y_0=(2+3x)e^{-x}$ 为特解的二阶常系数齐次线性微分方程为(　　).

(A)$y''-y'-2y=0$　　(B)$y''+y'-2y=0$

(C)$y''-2y'+y=0$　　(D)$y''+2y'+y=0$

3 设三阶常系数齐次线性微分方程有特解 $y_1=e^x,y_2=2xe^x,y_3=3e^{-x}$,则该微分方程为(　　).

(A)$y'''-y''-y'+y=0$　　(B)$y'''+y''-y'-y=0$

(C)$y'''+2y''-y'-2y=0$　　(D)$y'''-2y''-y'+2y=0$

4 微分方程 $y''-4y=e^{2x}+x$ 的特解形式为(　　).

(A)$ae^{2x}+bx+c$　　(B)$ax^2e^{2x}+bx+c$

(C)$axe^{2x}+bx^2+cx$　　(D)$axe^{2x}+bx+c$

5 微分方程 $y''-y'-6y=(x+1)e^{-2x}$ 的特解形式为(　　).

(A)$(ax+b)e^{-2x}$　　(B)ax^2e^{-2x}

(C)$(ax^2+bx)e^{-2x}$　　(D)$x^2(ax+b)e^{-2x}$

6 微分方程 $y''-4y=x+2$ 的通解为(　　).

(A)$(C_1+C_2x)e^{2x}-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$　　(B)$(C_1+C_2x)e^{-2x}-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$

(C)$C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-\frac{1}{4}x$　　(D)$C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$

7 设 $y_0=e^{2x}+(x+2)e^x$ 为 $y''+ay'+by=ce^x$ 的特解,则(　　).

(A)$a=-2,b=1,c=-1$　　(B)$a=3,b=2,c=-1$

(C)$a=-3,b=2,c=-1$　　(D)$a=-3,b=2,c=1$

8 设 $y=y(x)$ 为微分方程 $2xydx+(x^2-1)dy=0$ 满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解,则 $\int_0^{\frac{1}{2}}y(x)dx=$(　　).

(A)$-\ln 3$　　(B)$\ln 3$　　(C)$-\frac{1}{2}\ln 3$　　(D)$\frac{1}{2}\ln 3$

填空题 ▶答案见解答册 121 页

1 $xy'-2y=x^2\ln x$ 的满足初始条件 $y(e)=e^2$ 的特解为_____.

2 微分方程 $xy'+2y=e^x$ 的满足 $y(1)=0$ 的特解为_____.

3 微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为_____.

4 微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2x+y^2}$ 的通解为_____.

5 微分方程 $xy'-y[\ln(xy)-1]=0$ 的通解为_____.

6 微分方程 $y^2dx+(x^2-xy)dy=0$ 的通解为_____.

7 微分方程 $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y(x>0)$ 的通解为_____.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

8 连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=3\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t+2$，则 $f(x)=$_____.

9 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^x$，则 $f(x)=$_____.

10 设 $f(x)$ 可导，且 $\int_0^1[f(x)+xf(xt)]\mathrm{d}t=1$，则 $f(x)=$_____.

11 以 $y_1=x\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x$，$y_2=x\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{2x}$，$y_3=x\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{2x}$ 为特解的二阶常系数非齐次线性微分方程为_____.

12 设 $y=y(x)$ 为 $y''+2y'+ky=0$ 满足初始条件 $y(0)=a$，$y'(0)=b$ 的特解，$0<k<1$，则 $\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x=$_____.

13 设 $y=y(x)$ 过原点，在原点处的切线平行于直线 $y=2x+1$，又 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-6y'+9y=\mathrm{e}^{3x}$，则 $y(x)=$_____.

14 设微分方程 $y''-3y'+ay=-5\mathrm{e}^{-x}$ 的特解形式为 $Ax\mathrm{e}^{-x}$，则其通解为_____.

15 以 $y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^x+\cos x$ 为通解的二阶常系数非齐次线性微分方程为_____.

16 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，其原函数为 $F(x)$，满足 $F(0)=0$ 且 $f(x)+2F(x)=2$，求 $\int_0^{+\infty} x^3 f(x)\mathrm{d}x=$_____.

17 微分方程 $(2x+3)y''=4y'$ 的通解为_____.

18 微分方程 $yy''=1+y'^2$ 满足初始条件 $y(0)=1$，$y'(0)=0$ 的特解为_____.

解答题 答案见解答册 124 页

1 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+x+y+xy$ 的通解.

2 求微分方程 $xy'=y\ln\frac{y}{x}$ 的通解.

3 求微分方程 $(y-x^3)\mathrm{d}x-2x\mathrm{d}y=0$ 的通解.

4 求微分方程 $y^2\mathrm{d}x+(2xy+y^2)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

5 求微分方程 $\cos y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\cos x\sin^2 y=\sin y$ 的通解.

6 求微分方程 $xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$ 满足初始条件 $y(\mathrm{e})=2\mathrm{e}$ 的特解.

7 求微分方程 $x^2y'+xy=y^2$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解.

8 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2x+y}$ 的通解.

9 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{(x+y)^2}$ 的通解.

10 设 $y=\mathrm{e}^x$ 为微分方程 $xy'+P(x)y=x$ 的解，求此微分方程满足初始条件 $y(\ln 2)=0$ 的特解.

11 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且满足 $f(0)=1$，$f'(x)-f(x)=a(x-1)$. 求由 $y=f(x)$，$x=$

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

$0, x=1, y=0$ 围成的平面区域绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小时的 $f(x)$.

【12】设 $x>0$ 时，$f(x)$ 可导，且满足 $f(x)=1+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$.

【13】设 $f(x)=\mathrm{e}^x-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 连续，求 $f(x)$.

【14】设当 $x>0$ 时，$f(x)$ 满足 $\int_1^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)=x$，求 $f(x)$.

【15】设二阶常系数齐次线性微分方程以 $y_1=\mathrm{e}^{2x}, y_2=2\mathrm{e}^{-x}-3\mathrm{e}^{2x}$ 为特解，求该微分方程.

【16】求微分方程 $y''+2y'-3y=(2x+1)\mathrm{e}^x$ 的通解.

【17】求微分方程 $y''-2y'-\mathrm{e}^{2x}=0$ 满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=1$ 的特解.

【18】求微分方程 $y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{ax}$ 的通解.

【19】求微分方程 $y''+y=x^2+3+\cos x$ 的通解.

【20】设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(0)>0$，设 $f(x)$ 在 $[0,x]$ 上的平均值等于 $f(0)$ 与 $f(x)$ 的几何平均数，求 $f(x)$.

【21】设曲线 L 位于 xOy 平面的第一象限内，L 上任意一点 M 处的切线与 y 轴总相交，交点为 A，已知 $|MA|=|OA|$，且 L 经过点 $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$，求 L 的方程.

【22】一半球形雪堆融化速度与半球的表面积成正比，比例系数为 $k>0$，设融化过程中形状不变，设半径为 r_0 的雪堆融化 3 小时后体积为原来的 $\frac{1}{8}$，求全部融化需要的时间.

【23】求微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解.

【24】求满足初始条件 $y''+2xy'^2=0, y(0)=1, y'(0)=1$ 的特解.

【25】求微分方程 $yy''=y'^2$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=1$ 的特解.

【26】设单位质点在水平面内作直线运动，初速度 $v|_{t=0}=v_0$. 已知阻力与速度成正比（比例系数为 1），t 为多少时此质点的速度为 $\frac{v_0}{3}$？并求到此时刻该质点所经过的路程.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

第二部分 · 线性代数

一 行列式

选择题 ▶答案见解答册 129 页

1. 设 A 是三阶矩阵，B 是四阶矩阵，且 $|A|=2$，$|B|=6$，则 $\left|-\begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & 2B^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\right|$ 为(　　).

(A)24　　(B)-24　　(C)48　　(D)-48

2. 设 A 为二阶矩阵，且 A 的每行元素之和为 4，且 $|E+A|=0$，则 $|2E+A^2|$ 为(　　).

(A)0　　(B)54　　(C)-2　　(D)-24

填空题 ▶答案见解答册 129 页

1. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x+2 & -2 & 3 \\ 1 & 2x+3 & 4 \\ -2 & -1 & 3x+1 \end{vmatrix}$，则 x^2 项的系数为_____.

2. 设 A 为三阶矩阵，A 的第一行元素为 1,2,3，$|A|$ 的第二行元素的代数余子式分别为 $a+1,a-2,a-1$，则 $a=$_____.

3. 设 A 是 m 阶矩阵，B 是 n 阶矩阵，且 $|A|=a$，$|B|=b$，则 $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}=$_____.

4. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为三阶矩阵，且 $|A|=3$，则 $|\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2-3\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1|=$_____.

5. 设三阶矩阵 $A=(\alpha,\gamma_1,\gamma_2)$，$B=(\beta,\gamma_1,\gamma_2)$，其中 $\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2$ 是三维列向量，且 $|A|=3$，$|B|=4$，则 $|5A-2B|=$_____.

解答题 ▶答案见解答册 130 页

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

2. 计算 $D=\begin{vmatrix} a^2 & (a+2)^2 & (a+4)^2 \\ b^2 & (b+2)^2 & (b+4)^2 \\ c^2 & (c+2)^2 & (c+4)^2 \end{vmatrix}$.

3. 证明：$D=\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

4 设 $D=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\5&-9&2&7\\4&-6&1&2\end{vmatrix}$.(1) 计算 D;(2) 求 $M_{31}+M_{33}+M_{34}$.

5 计算 $D=\begin{vmatrix}2a&-1&0&0\\a^2&2a&-1&0\\0&a^2&2a&-1\\0&0&a^2&2a\end{vmatrix}$.

6 计算 $D=\begin{vmatrix}a&1&0&0\\0&a&1&0\\0&0&a&1\\1&x&x^2&x^3\end{vmatrix}$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

二 矩 阵

选择题 答案见解答册 131 页

1 设 n 维行向量 $\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2}\right)$,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$,则 $\boldsymbol{AB}=$(　　).

(A)$\boldsymbol{O}$　　(B)$-\boldsymbol{E}$　　(C)$\boldsymbol{E}$　　(D)$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$

2 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,则下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆　　(B) 若 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 可逆,则 $\boldsymbol{AB}$ 可逆

(C) 若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 可逆　　(D) 若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 都可逆

3 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶对称矩阵,下列结论不正确的是(　　).

(A)$\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵　　(B) 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 为对称矩阵

(C)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵　　(D)$k\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵

4 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 皆为 n 阶矩阵,则下列结论正确的是(　　).

(A)$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

(B)$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$

(C)$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 且 $r(\boldsymbol{A})=n$,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

(D) 若 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O}$,则 $|\boldsymbol{A}|\neq0$ 或 $|\boldsymbol{B}|\neq0$

5 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过若干次初等变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$,则(　　).

(A) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$　　(B) $|\boldsymbol{A}|\neq|\boldsymbol{B}|$

(C) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$ 则 $|\boldsymbol{B}|=0$　　(D) 若 $|\boldsymbol{A}|>0$ 则 $|\boldsymbol{B}|>0$

6 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵,$\boldsymbol{C}$ 为 n 阶矩阵,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC}$,且 $r(\boldsymbol{A})=r$,$r(\boldsymbol{B})=r_1$,则(　　).

(A)$r>r_1$　　(B)$r<r_1$

(C)$r\geqslant r_1$　　(D)r 与 r_1 的关系依矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的情况而定

7 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 阶矩阵,且 $m>n$,令 $r(\boldsymbol{AB})=r$,则(　　).

(A)$r>m$　　(B)$r=m$　　(C)$r<m$　　(D)$r\geqslant m$

8 设 $\boldsymbol{A}$ 为四阶非零矩阵,且 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$,则(　　).

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(A)$r(\boldsymbol{A})=1$　(B)$r(\boldsymbol{A})=2$　(C)$r(\boldsymbol{A})=3$　(D)$r(\boldsymbol{A})=4$

9 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，其中 $\boldsymbol{B}$ 是非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则(　　).

(A)$r(\boldsymbol{B})=n$　(B)$r(\boldsymbol{B})<n$

(C)$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$　(D)$|\boldsymbol{A}|=0$

10 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 m 阶和 n 阶可逆矩阵，则 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}\\ 2\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为(　　).

(A)$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^{-1}\\ 2\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　(B)$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^{-1}\\ 3\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$

(C)$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1}\\ \frac{1}{2}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　(D)$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \frac{1}{2}\boldsymbol{B}^{-1}\\ \frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$

11 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{12} & a_{11} & 2a_{12}+a_{13}\\ a_{22} & a_{21} & 2a_{22}+a_{23}\\ a_{32} & a_{31} & 2a_{32}+a_{33}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的关系为(　　).

(A)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}$　(B)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$

(C)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1$　(D)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$

12 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{31} & a_{32} & a_{33}-2a_{32}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}-2a_{22}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}-2a_{12}\end{pmatrix}$，又 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则(　　).

(A)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2$　(B)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1$

(C)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1$　(D)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2^{-1}$

填空题 ▶答案见解答册 132 页

1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵($n\geqslant 2$)，则$[(\boldsymbol{A}^*)^*]^{-1}=$_____(用 $\boldsymbol{A}^*$ 表示).

2 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}^n=$_____.

3 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，且 $n\geqslant 2$，则 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=$_____.

4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则$(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}^2-9\boldsymbol{E})=$_____.

5 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$ 的充分必要条件是_____.

6 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=4$，则 $\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\right|=$_____.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

7 设 A 为三阶矩阵，且 $|A|=4$，则 $\left|\left(\frac{1}{2}A^*\right)^{-1}\right|=$_____.

8 设 A 为四阶矩阵，$|A^*|=8$，则 $\left|\left(\frac{1}{4}A\right)^{-1}-3A^*\right|=$_____.

9 设 A 为三阶矩阵，且 $|A|=3$，则 $|(-2A)^*|=$_____.

10 设 $A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\1&2&0\\-1&2&-2\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$_____.

11 设 $A=\begin{pmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$_____.

12 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$，则 $(A^*)^{-1}=$_____.

13 设 $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 $(A-2E)^{-1}=$_____.

14 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2+A=3E$，则 $(A-3E)^{-1}=$_____.

15 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$，则 $A^*\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+A^*\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+A^*\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=$_____.

16 设 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,0,\cdots,0,a)^{\mathrm{T}}$，其中 $a<0$，又 $A=E-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，$B=E+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，且 B 为 A 的逆矩阵，则 $a=$_____.

17 设三阶矩阵 A,B 满足关系式 $A^{-1}BA=6A+BA$，且 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{pmatrix}$，则 $B=$_____.

18 设 A 是 4×3 阶矩阵且 $r(A)=2$，$B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$，则 $r(AB)=$_____.

19 设 $A=\begin{pmatrix}1&a&-2\\b&3&c\\2&d&-5\end{pmatrix}$，$B$ 为三阶非零矩阵，且 $AB=O$，则 $r(A)=$_____.

20 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$，则 $P_1^{2009}P_2^{-1}=$_____.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

解答题 ▶答案见解答册 136 页

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$. 求：(1) $|-2\boldsymbol{B}|$；(2)$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. 证明：$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$.

3. 设 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{X}$.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&4&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{AX}+|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}$.

5. 设四阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}\boldsymbol{BA}^{-1}=2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

6. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&&\\&-2&\\&&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{B}$.

7. 设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

8. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&a_1&0&\cdots&0\\0&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}\\a_n&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$ $(a_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n)$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

9. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$. 求：(1)$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}$；(2)$(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})^{-1}$.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，求$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$.

11. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}$；(2) 证明：当 $\boldsymbol{P}$ 可逆时，$\boldsymbol{Q}$ 也可逆.

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{A}^2=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$. 证明：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^*$.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$. 证明：$r(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+r(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=n$.

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，且 $r(\boldsymbol{A})=n$，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，证明：$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

15. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

16. 证明：$r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

三 向 量

选择题 ▶ 答案见解答册 138 页

1 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则(　　).

(A)α_1 可由 α_2,α_3 线性表示

(B)α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

(C)α_4 可由 α_1,α_3 线性表示

(D)α_4 可由 α_1,α_2 线性表示

2 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则向量组(　　).

(A)$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 线性无关

(B)$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关

(C)$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关

(D)$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

3 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关的充分必要条件是(　　).

(A) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性无关

(B) 存在一组不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq\mathbf{0}$

(C) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的维数大于其个数

(D) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的任意一个部分向量组线性无关

4 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，但 β_2 不可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，则(　　).

(A)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\beta_1$ 线性相关

(B)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\beta_1,\beta_2$ 线性相关

(C)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1+\beta_2$ 线性相关

(D)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1+\beta_2$ 线性无关

5 设 n 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m<n)$ 线性无关，则 n 维列向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充分必要条件是(　　).

(A) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性表示

(B) 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示

(C) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 等价

(D) 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$ 等价

6 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，β_2 不可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，对任意的常数 k 有(　　).

(A)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性无关

(B)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性相关

(C)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性无关

(D)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性相关

7 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$\boldsymbol{B}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，$\boldsymbol{AB}=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$，记向量组

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(Ⅰ):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$;(Ⅱ):$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$;(Ⅲ):$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$,若向量组(Ⅲ)线性相关,则(　　).

(A)(Ⅰ)(Ⅱ)都线性相关

(B)(Ⅰ)线性相关

(C)(Ⅱ)线性相关

(D)(Ⅰ)(Ⅱ)至少有一个线性相关

8 设向量组(Ⅰ):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r_1,向量组(Ⅱ):$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_2,且向量组(Ⅱ)可由向量组(Ⅰ)线性表示,则(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_1+r_2

(B) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s-\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_1-r_2

(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_1+r_2

(D) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_1

9 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充要条件是(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 都不是零向量

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量不成比例

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任一向量都不可由其余向量线性表示

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中有一个部分向量组线性无关

10 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|=0$,则 $\boldsymbol{A}$(　　).

(A) 必有一列元素全为零

(B) 必有两行元素对应成比例

(C) 必有一列是其余列向量的线性组合

(D) 任一列都是其余列向量的线性组合

填空题 答案见解答册 140 页

1 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ 线性相关,则 $a=$_____.

2 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,且 $\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,则 $a=$_____.

3 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3\\a+1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}b+2\\a-4\\9\end{pmatrix}$,且 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 两两正交,则 $a=$_____,$b=$_____.

4 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 为4阶方阵,且 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=k(1,1,2,-3)^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 表示的表达式为_____.

解答题 答案见解答册 140 页

1 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,证明:$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

2 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 为 $m+1$ 个 n 维向量,$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m(m>1)$. 证明:若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

性无关，则 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

3 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n(n\geqslant 2)$ 线性无关，证明：当且仅当 n 为奇数时，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

4 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 个 m 维向量，且 $m<n$. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关.

5 证明：若一个向量组中有一个部分向量组线性相关，则该向量组一定线性相关.

6 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性无关，且与非零向量 $\boldsymbol{\beta}$ 正交. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

7 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为两两正交的非零向量组，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，举例说明逆命题不成立.

8 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵$(m>n)$，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$. 证明：$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

9 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关，而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关. 证明：向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示.

10 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\t+2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}t-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 线性相关，但任意两个向量线性无关，求参数 t.

11 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 个线性无关的 n 维向量，且与向量 $\boldsymbol{\beta}$ 正交. 证明：向量 $\boldsymbol{\beta}$ 为零向量.

12 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 n 维列向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

四 线性方程组

选择题 答案见解答册 143 页

1 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，下列命题正确的是(　　).

(A) 若方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(B) 若方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解

(C) 若方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 无解，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 一定有非零解

(D) 若方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 一定有非零解

2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，则下列命题正确的是(　　).

(A) 若 $m<n$，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 一定有无穷多个解

(B) 若 $m>n$，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 一定有唯一解

(C) 若 $r(\boldsymbol{A})=n$，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 一定有唯一解

(D) 若 $r(\boldsymbol{A})=m$，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 一定有解

3 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为四维非零列向量组，令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=k(0,-1,3,0)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

4. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则下列向量组中也是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系的是(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+22\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3$

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同解，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为(　　).

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

(B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

(D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

填空题 答案见解答册143页

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&a\\1&a&9\end{pmatrix}(a<0)$，且 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的通解为_____.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为0且 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为_____.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=0,A_{ki}\neq 0$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为_____.

4. 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一组解，则 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解的充分必要条件是_____.

5. 设 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 为三阶矩阵，且矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的每个列向量为方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0,\\3x_1-x_2+kx_3=0,\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$ 的解，则 $k=$_____，$|\boldsymbol{B}|=$_____.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的三个解向量，$r(\boldsymbol{A})=3$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-2\\4\\2\\-8\end{pmatrix}$，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为_____.

7. 设方程组 $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ 无解，则 $a=$_____.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

8 设方程组$\begin{cases}x_1+x_2=-a_1,\\x_2+x_3=a_2,\\x_3+x_4=-a_3,\\x_4+x_1=a_4\end{cases}$有解，则$a_1,a_2,a_3,a_4$满足的条件是_____.

解答题 ▶答案见解答册 145 页

1 求方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+4x_4-3x_5=0,\\2x_1+x_2+3x_3+5x_4-5x_5=0,\\x_1-x_2+3x_3-2x_4-x_5=0,\\3x_1+x_2+5x_3+6x_4-7x_5=0\end{cases}$的通解.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

2 参数a取何值时，线性方程组$\begin{cases}ax_1+(a+3)x_2+x_3=-2,\\x_1+ax_2+x_3=a,\\x_1+x_2+ax_3=a^2\end{cases}$有无数个解？求其通解.

3 设$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}4\\5\\-3\\11\end{pmatrix}$为$\begin{cases}a_1x_1+2x_2+a_3x_3+a_4x_4=d_1,\\4x_1+b_2x_2+3x_3+b_4x_4=d_2,\\3x_1+c_2x_2+5x_3+c_4x_4=d_3\end{cases}$的三个解，求其通解.

4 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\10\end{pmatrix}$，求极大线性无关组，并把其余向量用极大线性无关组线性表出.

5 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$为四维列向量组，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，求$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系.

6 设$\boldsymbol{A}$是3×4阶矩阵且$r(\boldsymbol{A})=1$，设$(1,-2,1,2)^{\mathrm{T}},(1,0,5,2)^{\mathrm{T}},(-1,2,0,1)^{\mathrm{T}},(2,-4,3,a+1)^{\mathrm{T}}$皆为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解.(1)求常数$a$;(2)求方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的通解.

7 设$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$，其中$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$线性无关，且$\boldsymbol{\alpha}_2=3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_5$，$\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+6\boldsymbol{\alpha}_5$，求方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的通解.

8 四元非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$有三个解向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$且$r(\boldsymbol{A})=3$，设$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-6\\4\\-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\4\end{pmatrix}$，求方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的通解.

9 $\boldsymbol{A}_{n\times n}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{B}_{n\times n}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1)$，当$r(\boldsymbol{A})=n$时，方程组$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$是否有非零解？

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

10 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a+2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\a+8\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\b+3\\5\end{pmatrix}$.

(1)a，b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合？

(2)a，b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 可唯一表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合？

11 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的前 $n-1$ 个列向量线性相关，后 $n-1$ 个列向量线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(n-1)\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$.

(1) 证明方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解；

(2) 求方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

12 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\1&t&0&1\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有两个线性无关的解向量，求 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

13 就 a，b 的不同取值，讨论方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1,\\2x_1+(a+2)x_2-(b+2)x_3=3,\\-3ax_2+(a+2b)x_3=-3\end{cases}$ 解的情况.

14 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\a_1&a_2&a_3&a_4\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&a_4^2\\a_1^3&a_2^3&a_3^3&a_4^3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a_1^3\\a_2^3\\a_3^3\\a_4^3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$.

(1) 若 $a_i\neq a_j(i\neq j)$，求 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 的解；

(2) 若 $a_1=a_3=a\neq 0$，$a_2=a_4=-a$，求 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

15 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，$\boldsymbol{A\beta}\neq\boldsymbol{0}$. 证明：齐次线性方程组 $\boldsymbol{BY}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，其中 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_s)$.

16 当 a，b 取何值时，方程组 $\begin{cases}x_1+2x_3+2x_4=6,\\2x_1+x_2+3x_3+ax_4=0,\\3x_1+ax_3+6x_4=18,\\4x_1-x_2+9x_3+13x_4=b\end{cases}$ 无解、有唯一解、有无数个解？在有无数个解时求其通解.

17 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&0&-1\\3&-2&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&b+2\\a&-3\\5&-1\end{pmatrix}$，已知 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解，求 $\boldsymbol{X}$.

五 矩阵的特征值和特征向量

选择题 ▶答案见解答册 151 页

1 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，下列结论正确的是(　　).

(A)$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都不可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}$ 不可逆

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(B)$r(\boldsymbol{A})<n, r(\boldsymbol{B})<n$ 的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{AB})<n$

(C)$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$

(D)$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\sim\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$

2 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征值为(　　).

(A) $\dfrac{|\boldsymbol{A}|^{n-1}}{\lambda}$　　(B) $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$

(C)$\lambda|\boldsymbol{A}|$　　(D)$\lambda|\boldsymbol{A}|^{n-1}$

3 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=0,\lambda_3=1$，则下列结论不正确的是(　　).

(A) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可逆

(B) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹为零

(C) 特征值 $-1,1$ 对应的特征向量正交

(D) 方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有一个线性无关的解向量

4 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，又 $\lambda=-2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3$，下列向量中是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量的是(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$　　(B)$3\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$　　(D)$2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2$

5 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，下列结论不正确的是(　　).

(A) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 合同

(B) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是实数

(C) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{PAP}^{-1}$ 为对角阵

(D) 存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$ 为对角阵

6 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似，则(　　).

(A)$\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值都是单值

(B)$\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵

(C)$\boldsymbol{A}$ 存在 n 个线性无关的特征向量

(D)$\boldsymbol{A}$ 一定为 n 阶实对称矩阵

7 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为四维非零列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$，令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关特征向量个数为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

8 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵，下列矩阵不是正定矩阵的是(　　).

(A)$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}$　　(B)$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$　　(C)$\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*$　　(D)$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$

填空题 答案见解答册 152 页

1 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，其三个特征值为 $-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1$，则 $|4\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{E}|=$_____.

2 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，若 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ_0，则 $(\boldsymbol{A}^*)^2+3\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}$ 有特征值_____.

3 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 4，则 $\boldsymbol{A}$ 有特征值_____，对应的特征向量为_____.

4 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\a+1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-6\\3\\-2a\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值对应的特征向

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

量，则 $a=$_____.

5 设 $A\sim B$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&x&3\\0&4&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}6&0&0\\2&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，则 $x=$_____，$y=$_____.

6 设 A 是三阶实对称矩阵，其特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=5$，且 $\lambda_1=3$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，则 $\lambda_2=\lambda_3=5$ 对应的线性无关的特征向量为_____.

7 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为三维非零列向量，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=3$，$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，则 A 的全部特征值为_____.

8 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&a\\2&a&b\end{pmatrix}$ 的特征向量，则 $a=$_____，$b=$_____.

解答题 答案见解答册153页

1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

2 设 $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&a\\1&1&b\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为 A 的特征向量.

(1) 求 a,b 及 A 的所有特征值与特征向量；

(2) A 可否对角化？若可对角化，求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

3 设 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$，求 A 的特征值，并证明 A 不可以对角化.

4 设 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$，$B\sim A^*$，求 $B+2E$ 的特征值.

5 设 $A^{\mathrm{T}}A=E$，证明：A 的实特征值的绝对值为1.

6 设 λ_0 为 A 的特征值.

(1) 证明：A^{T} 与 A 特征值相等；

(2) 求 A^2，$A^2+2A+3E$ 的特征值；

(3) 若 $|A|\neq 0$，求 A^{-1}，A^*，$E-A^{-1}$ 的特征值.

7 设 X_1,X_2 分别为 A 的属于不同特征值 λ_1,λ_2 的特征向量. 证明：X_1+X_2 不是 A 的特征向量.

8 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$，$A=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\neq 0$，求 A 的全部特征值，并证明 A 可以对角化.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

9 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，其中 $a_1\neq 0$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$.

(1) 求方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解；

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值及其对应的线性无关的特征向量.

10 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，求 $|6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|$.

11 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，其对应的线性无关的特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$.

12 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}$，证明：λ^2 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值，$\boldsymbol{X}$ 为特征向量. 若 $\boldsymbol{A}^2$ 有特征值 λ，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{X}$ 是否一定为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量？说明理由.

13 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵.

(1) 是否有 $\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$；

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $1,2,\cdots,n$，证明：$\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$.

14 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维非零列向量，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$.

(1) 证明：$\boldsymbol{A}$ 可逆并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$；

(2) 证明：$\boldsymbol{\alpha}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

15 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$ 有一个特征值为 3.

(1) 求 y；　(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})$ 为对角矩阵.

16 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶实对称矩阵，$r(\boldsymbol{A})=1$，$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，设 $(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值对应的特征向量.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

17 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=8,\lambda_2=\lambda_3=2$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1=8$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$，属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，求属于 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的另一个特征向量.

18 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $(a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(b\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$ 且 $a\neq b$. 证明：$\boldsymbol{A}$ 可对角化.

19 设非零 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 正交且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$. 证明：$\boldsymbol{A}$ 不可以相似对角化.

20 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\3&6&1\end{pmatrix}$.

(1) 证明：$\boldsymbol{A}$ 可对角化；　(2) 求 $\boldsymbol{A}^m$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

例21 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，求 x,y 满足的条件.

例22 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵，且存在自然数 k，使得 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$. 证明：$\boldsymbol{A}$ 不可以对角化.

例23 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=i\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$.

例24 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-3&3\\6&x&-6\\y&-9&13\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量. 求 x,y，并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 对应的特征值 μ.

例25 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{pmatrix}$，$|\boldsymbol{A}|=-1$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征向量，求 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 λ 及 a,b,c 和 $\boldsymbol{A}$ 对应的特征值 μ.

例26 设 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$.

(1) 求 a,b；(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

例27 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&a&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&-6&2\end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

(1) 求 a；(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

例28 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&2\\a&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量.

(1) 求 a；(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量；(3) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵.

例29 (1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$ 且 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可相似对角化，证明：$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是否相似？若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

例30 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&a\\1&-1&3\end{pmatrix}$，且存在非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$，使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}$. 求常数 a.

例31 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，又 $|\boldsymbol{A}|=2$，求 $|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{E}|$.

例32 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$，其对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，令 $\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3)$，求 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}_1$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

六 二次型

选择题 ▶答案见解答册 163 页

1. 设 A,B 为 n 阶可逆矩阵，则(　　).

(A) 存在可逆矩阵 P_1,P_2，使得 $P_1^{-1}AP_1,P_2^{-1}BP_2$ 为对角矩阵

(B) 存在正交矩阵 Q_1,Q_2，使得 $Q_1^{\mathrm{T}}AQ_1,Q_2^{\mathrm{T}}BQ_2$ 为对角矩阵

(C) 存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}(A+B)P$ 为对角矩阵

(D) 存在可逆矩阵 P,Q，使得 $PAQ=B$

2. n 阶实对称矩阵 A 正定的充分必要条件是(　　).

(A) A 无负特征值　　(B) A 是满秩矩阵

(C) A 的每个特征值都是单值　　(D) A^{-1} 是正定矩阵

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

3. 下列说法正确的是(　　).

(A) 任一个二次型的标准形是唯一的

(B) 若两个二次型的标准形相同，则两个二次型对应矩阵的特征值相同

(C) 若一个二次型的标准形系数中没有负数，则该二次型为正定二次型

(D) 二次型的标准形不唯一，但规范形是唯一的

4. 设 A 为可逆的实对称矩阵，则二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 与 $X^{\mathrm{T}}A^{-1}X$(　　).

(A) 规范形与标准形都不一定相同

(B) 规范形相同但标准形不一定相同

(C) 标准形相同但规范形不一定相同

(D) 规范形和标准形都相同

5. 设 n 阶矩阵 A 与对角矩阵合同，则 A 是(　　).

(A) 可逆矩阵　　(B) 实对称矩阵

(C) 正定矩阵　　(D) 正交矩阵

6. 设 A,B 都是 n 阶矩阵，且存在可逆矩阵 P，使得 $AP=B$，则(　　).

(A) A,B 合同　　(B) A,B 相似

(C) 方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解　　(D) $r(A)=r(B)$

7. 设 A,B 为 n 阶实对称矩阵，则 A 与 B 合同的充分必要条件是(　　).

(A) $r(A)=r(B)$　　(B) $|A|=|B|$

(C) $A\sim B$　　(D) A,B 与同一个实对称矩阵合同

8. 设 $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\0&0&-5\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 A 与 B(　　).

(A) 相似且合同　　(B) 相似不合同

(C) 合同不相似　　(D) 不合同也不相似

9. 设 A,B 为三阶矩阵，且特征值均为 $-2,1,1$，以下命题：

(1) $A\sim B$；(2) A,B 合同；(3) A,B 等价；(4) $|A|=|B|$ 中正确的命题个数为(　　).

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(A)1个　　(B)2个　　(C)3个　　(D)4个

填空题 ▶答案见解答册164页

1. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-2x_2)^2+4x_2x_3$ 的矩阵为_____.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 经过施密特正交规范化后的向量组为_____.

3. 设二次型 $2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+ax_2x_3$ 的秩为2，则 $a=$_____.

4. 设 $5x_1^2+x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$ 为正定二次型，则 t 的取值范围是_____.

解答题 ▶答案见解答册165页

1. 用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2x_3$ 为标准二次型.

2. 用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-4x_3^2$ 为标准形.

3. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{A}$ 的主对角线上元素之和为3，又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}.$$

(1) 求正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 将二次型化为标准形；

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

4. 用正交变换法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$ 为标准二次型.

5. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(a-1)x_1^2+(a-1)x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2(a>0)$ 的秩为2.

(1) 求 a；　(2) 用正交变换法化二次型为标准形.

6. 设 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，且满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$（$\boldsymbol{A}$ 称为幂等阵）.

求：(1) 二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的标准形；　(2) $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^n|$ 的值.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称可逆矩阵，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{A_{ij}}{|\boldsymbol{A}|}x_ix_j$.

(1) 记 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，把二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 写成矩阵形式；

(2) 二次型 $g(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是否与 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 合同？

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，$r(\boldsymbol{A})=2$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值；

(2) 当 k 为何值时，$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵？

9. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$ 为正定二次型，求 t 的范围.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，证明：$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|>1$.

11. 用配方法化下列二次型为标准形：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-5x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3.$$

12. 用配方法化下列二次型为标准形：

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3.$$

【13】二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$ 经过正交变换化为标准形 $5y_1^2+by_2^2-4y_3^2$，求：

(1) 常数 a,b；(2) 正交变换的矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

【14】设 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}$，

(1) 求 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$；(2) 证明：$\boldsymbol{D}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 为正定矩阵.

【15】设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=1$，又 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

(1) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 下二次型化为标准形；

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

【16】设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2-2x_2x_3+x_3^2$.

(1) 设 $f(x_1,x_2,x_3)=0$，求 $\boldsymbol{X}$；

(2) 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

【17】设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵，存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}} & l_{12} & l_{13}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & l_{22} & l_{23}\\ 0 & l_{32} & l_{33}\end{pmatrix}$，使得

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\overset{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}}{=\!=\!=}y_2^2+y_3^2.$$

(1) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$；

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

提高篇

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

第一部分 · 高等数学

一 函数、极限、连续

选择题 ▶答案见解答册 172 页

1. 设$\{a_n\}$与$\{b_n\}$为两个数列，下列说法正确的是(　　).

(A) 若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都发散，则$\{a_nb_n\}$一定发散

(B) 若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都无界，则$\{a_nb_n\}$一定无界

(C) 若$\{a_n\}$无界且$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$

(D) 若a_n为无穷大，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$，则$b_n$一定是无穷小

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

2. 设$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^a-\ln(1+x^a)}=b(\neq0)$，则(　　).

(A)$a=1,b=1$　　(B)$a=1,b=3$

(C)$a=2,b=3$　　(D)$a=2,b=2$

3. 设$f(x)=\int_0^x e^{t^2}\cos t\,dt-x\sim ax^b(x\to0)$，则(　　).

(A)$a=-\dfrac{1}{6},b=3$　　(B)$a=\dfrac{1}{3},b=3$

(C)$a=\dfrac{1}{6},b=3$　　(D)$a=-\dfrac{1}{3},b=3$

4. 设函数$f(x)$二阶可导，$f(0)=f'(0)=0,f''(0)=2$，令$\alpha=\int_0^{\arctan^2 x}f(t)dt$，$\beta=\int_0^{x-\ln(1+x)}\dfrac{f(t)}{\ln(1+t)}dt$，则当$x\to0^+$时，$\alpha$是$\beta$的(　　).

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C) 同阶非等价的无穷小　　(D) 同阶无穷小

5. 设当$x\to0$时，有$ax^3+bx^2+cx\sim\int_0^{\ln(1+2x)}\sin t\,dt$，则(　　).

(A) $a=\dfrac{1}{3},b=1,c=0$　　(B) $a=-\dfrac{1}{3},b=1,c=0$

(C) $a=\dfrac{1}{3},b=-1,c=0$　　(D) a为任意常数，$b=2,c=0$

6. 设$f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^2dt,g(x)=x^3+x^4$，当$x\to0$时，$f(x)$是$g(x)$的(　　).

(A) 等价无穷小　　(B) 同阶但非等价的无穷小

(C) 高阶无穷小　　(D) 低阶无穷小

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

7. 设 $f(x)=\int_0^x \mathrm{d}t\int_0^t t\ln(1+u^2)\mathrm{d}u$，$g(x)=\int_0^{\sin x^2}(1-\cos t)\mathrm{d}t$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的（　　）.

(A) 低阶无穷小　　(B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小　　(D) 同阶但非等价的无穷小

8. 设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3+f(x)}{x^2}=$（　　）.

(A) -27　　(B) 27　　(C) -9　　(D) 9

9. 设 $\alpha\sim\beta(x\to a)$，则 $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}}=$（　　）.

(A) e　　(B) e^2　　(C) 1　　(D) $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$

10. 设 $f(x)$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=\sin 2x+2\mathrm{e}^x$ 的满足初始条件 $f(0)=f'(0)=0$ 的特解，则当 $x\to 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+f(x)]}{x^2}$（　　）.

(A) 不存在　　(B) 等于 0　　(C) 等于 1　　(D) 其他

11. 设 $f(x)=\dfrac{x}{a+\mathrm{e}^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则（　　）.

(A) $a>0,b>0$　　(B) $a<0,b<0$

(C) $a\geqslant 0,b<0$　　(D) $a\leqslant 0,b>0$

12. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}-\dfrac{\pi|\ln x|}{\sin\pi x}, & x\neq 1,\\ 2, & x=1,\end{cases}$ 则 $x=1$ 为 $f(x)$ 的（　　）.

(A) 连续点　　(B) 可去间断点

(C) 跳跃间断点　　(D) 第二类间断点

13. 下列命题正确的是（　　）.

(A) 若 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续

(B) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处连续

(C) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 的一个邻域内连续

(D) 若 $\lim\limits_{h\to 0}[f(a+h)-f(a-h)]=0$，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续

14. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+(x-1)^{2n}}{2+x(x-1)^{2n}}$，则（　　）.

(A) $x=0,x=2$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

(B) $x=0,x=2$ 都是 $f(x)$ 的可去间断点

(C) $x=0,x=2$ 都是 $f(x)$ 的跳跃间断点

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=2$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点

填空题 答案见解答册 175 页

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=$_____.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin(x-t)^2\,dt}{\sin^2 x\ln(1-x)}=$_____.

3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\arcsin x)^x-x^x}{x^2-\ln^2(1+x)}=$_____.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\mathrm{e}^x-\ln(1+x)}{x^2}=$_____.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\arcsin x}-\mathrm{e}^{\sin x}}{x^3}=$_____.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\sin(x^2-t^2)\,dt}{(1-\cos x)\ln(1+2x^2)}=$_____.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \mathrm{e}^t\cos t\,dt-x-\dfrac{x^2}{2}}{(x-\tan x)(\sqrt{x+1}-1)}=$_____.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left(\sin t+t^2\cos\dfrac{1}{t}\right)dt}{1-\cos^2 x}=$_____.

9. 设 $f'(x)$ 连续可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln\cos(x-t)\,dt}{\sqrt{1+f^2(x)}-1}=$_____.

10. 设 $f(x)$ 连续，且 $f(1)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^{\frac{1}{x}} f(xt)\,dt}{x^3-1}=$_____.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{-1}^{2}\mathrm{e}^{-x^2t^2}\,dt-3}{\sqrt{1+x^2}-1}=$_____.

12. 设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \arctan(x-t)^2\,dt}{\int_0^x tf(x-t)\,dt}=$_____.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3+x)^x-3^x}{x^2}=$_____.

14. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos 2x}}{\ln(1+x)(1-\cos\sqrt{x})}=$_____.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\arctan\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=$_____.

16. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{ax}=\int_{-\infty}^{a} t\mathrm{e}^t\,dt$，则 $a=$_____.

17. 设 $f(x)$ 可导且 $f(x)\neq 0$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x+h)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=$_____.

18. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=$_____.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类口重网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

19 当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x\cos 2x\sim cx^k$，则 $c=$_____，$k=$_____.

20 设 $x-(a+b\cos x)\sin x$ 为 x 的 5 阶无穷小，则 $a=$_____，$b=$_____.

21 设当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\int_0^{x^2}\ln(1+t)\mathrm{d}t\sim g(x)=x^a(\mathrm{e}^{bx}-1)$，则 $a=$_____，$b=$_____.

22 当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\cos^2 x-1$，则 $a=$_____.

23 设 $f(x)$ 一阶连续可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}=$_____.

24 设 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$_____.

25 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\frac{\arcsin x}{2}}, & x>0,\\ a\mathrm{e}^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$_____.

26 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(1-\cos x)+2\ln(1+bx^2)}{\mathrm{e}^x-x-1}, & x>0,\\ 3, & x=0,\\ \dfrac{2bx\sin x+\int_0^{x^2}\cos t\mathrm{d}t}{x\arctan x}, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$_____，

$b=$_____.

解答题 答案见解答册 180 页

1 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\arctan^x x-x^x}{(1-\sqrt{\cos x})\ln(1+2x)}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^{2x}+\sin x)-2x}{\ln(\mathrm{e}^x+\tan 2x)-x}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\arcsin x}{x^3}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{\cos x+\mathrm{e}^{x^2}}{2}\right)^x-1\right]$.

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{x-1-\ln x}$.

2 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\sin x)-\sin(\tan x)}{x^3}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(5) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^3}$.

3 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos(\tan x)-\cos x}{x^2-\sin^2 x}$.

4 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

5 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sin x+e^{\tan x})^{\frac{1}{x}}-(\tan x+e^{\sin x})^{\frac{1}{x}}}{x^3}$.

6 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^4+2x+4)}{\ln(2x^2+4x-1)}$.

7 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}$.

8 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}[(2x+2)\arctan x-\pi x]$.　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2-4x+3}+2x)$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\arctan^2 x}\right)$.

9 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(\arctan e^{\frac{1}{2x-1}}-\arctan e^{\frac{1}{2x+1}})$.

10 设 $f(x)$ 可导且 $f''(0)=6$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，求 $\lim\limits_{x\to0}[1+f(x)]^{\frac{1}{x^2}}$.

11 设 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$，其中 $f(x)$ 连续，求 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

12 设 $f(x)$ 连续可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，求 $\lim\limits_{x\to0}\left[\cos x+\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{x-\ln(1+x)}}$.

13 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^9}{(x+1)^a-(x-1)^a}=b(b\neq0,\infty)$，求 a,b.

14 确定常数 a,b,c，使得 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{b}{x^5}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)=c$.

15 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\arctan x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x^n}=c(c\neq0)$，求 n,c 的值.

16 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+ax)-e^{bx}+\cos x}{x^2}=-\dfrac{9}{2}$，求 a,b 的值.

17 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{\int_0^{x^2}e^{-t^2}\mathrm{d}t}=\dfrac{3}{2}$，求 a,b 的值.

18 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{2n}\dfrac{i}{n^2}\sin^2\dfrac{\pi i}{n}$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{e^{\frac{i}{n}}}{n+\frac{1}{i}}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$.

19 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln(n+1)}=1$.

20 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上可导，$f'(x)<0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a>0$，

令 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$. 证明：$\{a_n\}$ 收敛且 $0\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leqslant f(1)$.

21 设 $a>0$，$x_1>0$，且定义 $x_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(3x_n+\dfrac{a}{x_n^3}\right)$ $(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求其值.

22 设 $a_1=1$，当 $n\geqslant 1$ 时，$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{a_n}{1+a_n}}$，证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛并求其极限.

23 设当 $x\geqslant 0$ 时，$f(0)=1$，且 $f'(x)=\dfrac{1}{f^2(x)+x^2}$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且不超过 $1+\dfrac{\pi}{2}$.

24 设函数 $f(x)$ 可导且 $0\leqslant f'(x)\leqslant\dfrac{k}{1+x^2}(k>0)$，对任意的 x_n，作 $x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在且满足方程 $f(x)=x$.

25 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义，且 $e^x f(x)$ 与 $e^{-f(x)}$ 在 $[0,1]$ 上单调增加. 证明：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

26 设 $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$，求 $f(x)$ 的间断点并判断其类型.

27 求 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}, & x<0,\\ \ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的间断点并判断其类型.

28 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，求 $f(x)$ 的间断点并判断其类型.

29 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x+2)}{\sin\pi x}, & x<0,\\ \dfrac{x}{x^2-1}, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的间断点并判断其类型.

30 求 $f(x)=\dfrac{x^3+x}{(x^2-1)\arctan x}e^{\frac{1}{x-2}}$ 的各类间断点.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

二 导数与微分

选择题 ▶答案见解答册 191 页

1. 设 $f(x)$ 连续，且 $g(x)=|x-a|[f(x)+|f(x)|]$，则 $g(x)$ 在 $x=a$ 处可导的充要条件是(　　).

(A) $f(a)=0$　　(B) $f'(a)=0$

(C) $f(a)=-|f(a)|$　　(D) $f(a)=|f(a)|$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\left(1-2^{\frac{1}{x}}\right)}{1+2^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 极限不存在　　(B) 极限存在但不连续

(C) 连续但不可导　　(D) 可导

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

3. 设 $f(x)=|x-x^3|x^2$，则使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在最高阶导数的阶数 $n=$(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

4. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $f(a)\neq 0$，则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处(　　).

(A) 可导　　(B) 不可导　　(C) 不一定可导　　(D) 不连续

5. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的邻域内有定义，且 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(a)$ 都存在，则(　　).

(A) $f(x)$ 在 $x=a$ 处不连续　　(B) $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续

(C) $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导　　(D) $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续可导

6. 函数 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{|x|}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 不连续　　(B) 连续不可导

(C) 可导但 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续　　(D) 可导且 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

7. 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的充分必要条件是(　　).

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$ 存在　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f[1+\ln(1+2h^2)]-f(1)}{e^{h^2}-1}$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2-\cos h)-f(1)}{h}$ 存在　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(e^h)-f(1)}{h}$ 存在

8. 设 $y=f(x)$ 二阶可导且 $f'(x)\neq 0$，又 $f(0)=1$，$f'(0)=-1$，$f''(0)=2$，则 $\left.\dfrac{d^2x}{dy^2}\right|_{y=1}$ =(　　).

(A) -1　　(B)2　　(C)1　　(D) -2

9. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处二阶可导，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(a+x)-f(a)}{x}-f'(a)}{x}=$(　　).

(A) $-f''(a)$　　(B) $f''(a)$　　(C) $2f''(a)$　　(D) $\dfrac{1}{2}f''(a)$

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

10. 设 $f(x)$ 为二阶可导的奇函数，且 $x<0$ 时有 $f''(x)>0, f'(x)<0$，则当 $x>0$ 时有(　　).

(A) $f''(x)<0, f'(x)<0$　　(B) $f''(x)>0, f'(x)>0$

(C) $f''(x)>0, f'(x)<0$　　(D) $f''(x)<0, f'(x)>0$

11. 设 $f(x)$ 为单调可微函数，$g(x)$ 与 $f(x)$ 互为反函数，且 $f(2)=4, f'(2)=\sqrt{5}, f'(4)=6$，则 $g'(4)=$(　　).

(A) $\frac{1}{4}$　　(B) $\frac{1}{\sqrt{5}}$　　(C) $\frac{1}{6}$　　(D)4

12. 下列命题成立的是(　　).

(A) 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则存在 $\delta>0$，使得 $f(x)$ 在 $|x-x_0|<\delta$ 内连续

(B) 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则存在 $\delta>0$，使得 $f(x)$ 在 $|x-x_0|<\delta$ 内可导

(C) 若 $f(x)$ 在 x_0 的去心邻域内可导，在 x_0 处连续且 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$

(D) 若 $f(x)$ 在 x_0 的去心邻域内可导，在 x_0 处连续且 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 不存在，则 $f(x)$ 在 x_0 处不可导

13. 设 $f(x)$ 可导，则下列正确的是(　　).

(A) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$

(B) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$

(C) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

(D) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

14. 下列说法中正确的是(　　).

(A) 若 $f'(x_0)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内单调递减

(B) 若 $f(x)$ 在 x_0 取极大值，则当 $x\in(x_0-\delta, x_0)$ 时，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(x_0, x_0+\delta)$ 时，$f(x)$ 单调递减

(C) $f(x)$ 在 x_0 取极值，则 $f(x)$ 在 x_0 连续

(D) $f(x)$ 为偶函数，$f''(0)\neq 0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处一定取到极值

填空题 答案见解答册194页

1. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(2x-1)-2}{\sin \pi x}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1+2x)+f(1-x)-4}{x}=$ _____.

2. 设 $f(x)=x^2\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{t+x}{t-x}\right)^{4t}$，则 $f'(x)=$ _____.

3. 设函数 $y=f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ 满足 $f'(x)=\arctan\sqrt{x}$，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}=$ _____.

4. 设 $f(x)$ 为二阶可导的偶函数，$f(0)=1, f''(0)=2$ 且 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内连续，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]=$ _____.

5. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的邻域内二阶可导且 $f'(a)\neq 0$，则

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{(x-a)f'(a)}-\frac{1}{f(x)-f(a)}\right]=_____.$$

6 设由方程 $xe^{f(y)}=e^{y}$ 确定 y 为 x 的函数，其中函数 f 二阶可导，且 $f'\neq 1$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$_____.

7 设 $y=y(x)$ 由 $ye^{xy}+x\cos x-1=0$ 确定，则 $dy\big|_{x=0}=$_____.

8 设 $\int_0^y e^t dt+\int_0^x \cos t\,dt=xy$ 确定函数 $y=y(x)$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$_____.

9 设两曲线 $y=x^2+ax+b$ 与 $-2y=-1+xy^3$ 在点 $(-1,1)$ 处相切，则 $a=$_____，$b=$_____.

10 设 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(x+2)$，$f(0)=0$，又在 $(-1,1)$ 内 $f'(x)=|x|$，则 $f\left(\dfrac{7}{2}\right)=$_____.

11 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e^2$，又 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$，则 $a=$_____.

12 设 $f(x,y)$ 可微，$f(1,2)=2$，$f'_x(1,2)=3$，$f'_y(1,2)=4$，$\varphi(x)=f[x,f(x,2x)]$，则 $\varphi'(1)=$_____.

13 设 $F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f'(t)dt$，其中 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且当 $x\to 0$ 时，$F'(x)\sim x^2$，则 $f'(0)=$_____.

14 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ ax+b, & x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处可微，则 $a=$_____，$b=$_____.

15 设 $\begin{cases}x=\arctan 2t,\\ y+e^y=\ln(e+t^2),\end{cases}$ 则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=$_____.

16 设 $\begin{cases}x=\cos t^2,\\ y=t\cos t^2-\int_1^{t^2}\dfrac{\cos u}{2\sqrt{u}}du\end{cases}(t>0)$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=$_____.

17 设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ \int_0^y e^{u^2}du+\int_{t^2}^1\arcsin u\,du=0\end{cases}$ 确定，则 $y=y(x)$ 在 $x=\ln 2$ 处的法线方程为_____.

解答题 ▶答案见解答册 197 页

1 设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，对任意的 x,y 有 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 且 $f'(0)=1$，求 $f(x)$.

2 求曲线 $x^3-3xy+y^3=3$ 上纵坐标最大和最小的点.

3 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上可导，$f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $f'(0)=0$，$f''(0)=4$. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f[\ln(1+x)]}{x^3}$.

4 设 $y=f\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)$，其中 $f(x)=\arcsin\dfrac{x}{2}$，求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$.

5 设 $y=y(x)$ 由 $e^{xy}+\ln y=x^2+y^2$ 确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

6. 设 $x=x(t)$ 由 $\sin t-\int_1^{x-t}e^{-u^2}du=0$ 确定，求 $\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=0}$.

7. 设 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，$f(x)$ 可导，且 $f'(x)=e^{x^2+x+1}$，$f(0)=3$，求 $\varphi''(3)$.

8. 设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=A$. 求 $\varphi'(x)$，并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

9. 设 $y=\begin{cases}\cos\frac{\pi}{2}x, & |x|\leqslant1,\\ |x-1|, & |x|>1,\end{cases}$ 求 y'.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+2x), & x>0,\\ ax^2+bx+c, & x\leqslant0,\end{cases}$ 且 $f''(0)$ 存在，求 a,b,c.

11. 设 $f(x)=\int_0^1 t|x-t|dt(x>0)$，

(1) 求 $f'(x)$；

(2) 求 $f(x)$ 的最小值.

12. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 二阶连续可导，且 $g(0)=1$.

(1) 确定常数 a，使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

(2) 求 $f'(x)$；

(3) 讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

13. 设 $f(x)$ 二阶连续可导且 $f(0)=f'(0)=0$，$f''(x)>0$. 过曲线 $y=f(x)$ 上任一点 $(x,f(x))(x\neq0)$ 处作切线，此切线在 x 轴上的截距为 u，求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{xf(u)}{uf(x)}$.

14. 设 $f(x)=(2+x-x^2)\ln(1+2x)$，求 $f^{(5)}(0)$.

15. 设 $f'(0)=1$，$f''(0)=0$，证明：$\left.\frac{d^2}{dx^2}f(x^2)\right|_{x=0}=\left.\frac{d^2}{dx^2}f^2(x)\right|_{x=0}$.

三 中值定理与一元函数微分学的应用

选择题 答案见解答册 202 页

1. 设 ξ 为 $f(x)=\arctan x$ 在 $[0,a]$ 上使用微分中值定理的中值，则 $\lim\limits_{a\to0}\frac{\xi^2}{a^2}=$（　　）.

(A) 1　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{1}{4}$

2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，$f(0)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+f'(x)}{x}=2$，则（　　）.

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

3. 设 $f(x)$ 连续可导，$g(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=0$，又 $f'(x)=-2x^2+\int_0^x g(x-t)dt$，

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

则(　　).

(A)$x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点

(B)$x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

(C)$(0,f(0))$ 为 $y=f(x)$ 的拐点

(D)$x=0$ 既不是 $f(x)$ 极值点,$(0,f(0))$ 也不是 $y=f(x)$ 的拐点

【4】设 $f(x)$ 二阶连续可导,$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f'(x)}{(x-2)^3}=\dfrac{2}{3}$,则(　　).

(A)$f(2)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(B)$f(2)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C)$(2,f(2))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D)$f(2)$ 不是函数 $f(x)$ 的极值,$(2,f(2))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

【5】设 $f(x)$ 二阶连续可导,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{x}=-1$,则(　　).

(A)$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　(B)$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C)$(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点　　(D)$x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点但不是极值点

【6】设函数 $f(x)$ 二阶连续可导且满足关系 $f''(x)+f'^2(x)=x$,且 $f'(0)=0$,则(　　).

(A)$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　(B)$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C)$(0,f(0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点　　(D)$(0,f(0))$ 不是 $y=f(x)$ 的拐点

【7】下列说法正确的是(　　).

(A) 设 $f(x)$ 在 x_0 二阶可导,则 $f''(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续

(B)$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值一定是其极大值

(C)$f(x)$ 在 (a,b) 内的极大值一定是其最大值

(D) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f(x)$ 在 (a,b) 内有唯一的极值点,则该极值点一定为最值点

【8】设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可导,$f(a)<0$,$f'(a)=0$,且 $f''(x)\geqslant k(k>0)$,则 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内的零点个数为(　　).

(A)0 个　　(B)1 个　　(C)2 个　　(D)3 个

【9】设 $k>0$,则函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k$ 的零点个数为(　　).

(A)0 个　　(B)1 个

(C)2 个　　(D)3 个

【10】曲线 $y=\dfrac{x^2+1}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$ 的渐近线的条数为(　　).

(A)0 条　　(B)1 条

(C)2 条　　(D)3 条

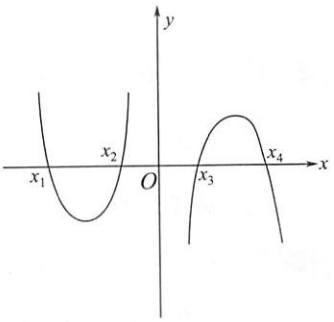
【11】设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,其导数的图形如右图,则 $f(x)$ 有(　　).

(A) 两个极大值点,两个极小值点,一个拐点

(B) 两个极大值点,两个极小值点,两个拐点

(C) 三个极大值点,两个极小值点,两个拐点

(D) 两个极大值点,三个极小值点,两个拐点



第 11 题图

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

填空题 ▶答案见解答册 204 页

1. 设 $f(x)=\ln(1+2x)$，且 $f(x)=f'(\theta x)x$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\theta=$_____.

2. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{e}$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x-1)]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{2x}$，则 $a=$_____.

3. 若 $f(x)=2nx(1-x)^n$，记 $M_n=\max\limits_{0<x<1}f(x)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}M_n=$_____.

4. 当 $x>0$ 时，$3x^2+\dfrac{A}{x^3}\geqslant 20$ 恒成立，则 A 的最小值为_____.

5. 曲线 $y=\dfrac{2x^5-4x^4+1}{x^4+1}$ 的斜渐近线为_____.

解答题 ▶答案见解答册 205 页

1. 设 $f(x)\in C[0,1]$，在 $(0,1)$ 内二阶可导，又 $f(0)=f(1)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$.

2. 设 $f(x)$ 二阶可导，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=1$，$f(1)=2$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)f'_-(b)<0$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

4. 设 $f(x)\in C[0,1]$，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=2\int_0^{\xi}f(x)\mathrm{d}x$.

5. 设 $f(x)\in C[0,1]$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\xi f(\xi)=3\int_{\xi}^1 f(t)\mathrm{d}t$.

6. 设 $f(x)\in C[0,1]$，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln[f(x)+2]}{\cos\frac{\pi}{2}x}=0$，又 $f(2)=2\int_1^{\frac{3}{2}}f(x)\mathrm{d}x$，证明：存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)+f''(\xi)=0$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得
$$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$

9. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，$f(1)=0$. 证明：

(1) 存在 $\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得 $f(\eta)=\eta$；

(2) 对任意的 $k\in(-\infty,+\infty)$，存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-k[f(\xi)-\xi]=1$.

10. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$. 证明：

(1) 存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=0$；

(2) 存在 $\xi_i\in(a,b)(i=1,2)$，且 $\xi_1\neq\xi_2$，使得 $f'(\xi_i)+f(\xi_i)=0(i=1,2)$；

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(3) 存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f''(\xi)=f(\xi)$；

(4) 存在 $\eta \in (a,b)$，使得 $f''(\eta)-3f'(\eta)+2f(\eta)=0$.

【11】设 $f(x)$ 二阶可导，$f(0)=0$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$，证明：

(1) 存在 $c \in (0,1)$，使得 $f(c)=c$；

(2) 存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f'(\xi)-2f(\xi)=1-2\xi$.

【12】设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$f'_+(a)f'_-(b)>0$，且 $g(x)\neq 0(x\in[a,b])$，$g''(x)\neq 0(a<x<b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

【13】设函数 $f(x)\in C[1,2]$，在 $(1,2)$ 内可导，且 $f(1)=1$，证明：存在 $\xi\in(1,2)$，使得

$$f(2)-2=\xi f'(\xi)-f(\xi).$$

【14】设 $f(x)\in C[1,2]$，在 $(1,2)$ 内可导，且 $f(1)=0$，证明：存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $f(2)=\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{1-\ln\xi}\ln 2$.

【15】设 $f(x)\in C[0,1]$，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：

(1) 存在 $c\in(0,1)$，使得 $f(c)=\frac{2}{3}$；

(2) 存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，使得 $\frac{2}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\eta)}=3$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【16】设 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上连续且严格单调的函数，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=a<b=f(b)$.

证明：存在 $\xi_i\in(a,b)(i=1,2,\cdots,n)$，使得 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f'(\xi_i)}=1$.

【17】设 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)=1$. 证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$$2\mathrm{e}^{2\xi-\eta}=(\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b)[f'(\eta)+f(\eta)].$$

【18】设 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导 $(a>0)$，证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$$abf'(\xi)=\eta^2 f'(\eta).$$

【19】设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内二阶连续可导，且 $f''(x)\neq 0$. 证明：

(1) 对 $(-1,1)$ 内任一点 $x\neq 0$，存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使得

$$f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)x];$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

【20】设 $f(x)$ 二阶连续可导，且 $f''(x)\neq 0$，又 $f(x+h)=f(x)+f'(x+\theta h)h(0<\theta<1)$.

证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$.

【21】设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处 n 阶连续可导，且 $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$，$f^{(n)}(a)\neq 0$，又 $f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)h$，求 $\lim\limits_{h\to 0}\theta$.

【22】设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导，$|f''(x)|\leqslant M$，又 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内取最小值，证明：

$$|f'(0)|+|f'(2)|\leqslant 2M.$$

【23】设 $f(x)$ 二阶可导，$f(0)=0$，且 $f''(x)>0$. 证明：对任意的 $a>0,b>0$，有

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

$$f(a+b)>f(a)+f(b).$$

【24】设 $f(x)$ 二阶可导，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 且 $f''(x)>0$. 证明：当 $x\neq 0$ 时，$f(x)>x$.

【25】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)>0$，取 $x_i\in[a,b](i=1,2,\cdots,n)$ 及 $k_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 且满足 $k_1+k_2+\cdots+k_n=1$. 证明：

$$f(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n)\leqslant k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots+k_nf(x_n).$$

【26】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶连续可导. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

【27】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $|f(x)|\leqslant a$，$|f''(x)|\leqslant b$，其中 a,b 都是非负常数，c 为 $(0,1)$ 内任意一点.

(1) 写出 $f(x)$ 在 $x=c$ 处带拉格朗日型余项的一阶泰勒公式；

(2) 证明：$|f'(c)|\leqslant 2a+\dfrac{b}{2}$.

【28】设 $f(x)$ 在 $[-a,a](a>0)$ 上有四阶连续的导数，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$ 存在.

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的麦克劳林公式；

(2) 证明：存在 $\xi_1,\xi_2\in[-a,a]$，使得 $\begin{cases}a^5f^{(4)}(\xi_1)=60\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x,\\ a^4f^{(4)}(\xi_1)=120f(\xi_2).\end{cases}$

【29】设 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二阶连续可导，$|f(x)|\leqslant 1$，且 $f^2(0)+f'^2(0)=4$，证明：存在 $\xi\in(-2,2)$，使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

【30】设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导且 $f(0)=1$，$f'(x)<f(x)(x>0)$. 证明：$f(x)<\mathrm{e}^x(x>0)$.

【31】证明：当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

【32】设 $0<a<b$，证明：$\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

【33】当 $x>0$ 时，证明：$\dfrac{\arctan x}{\ln(1+x)}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

【34】当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，证明：$\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x$.

【35】证明：当 $0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\dfrac{\tan x_2}{\tan x_1}>\dfrac{x_2}{x_1}$.

【36】设函数 $f(x)$ 满足 $xf''(x)+(\mathrm{e}^{2x}-1)f'^2(x)=1-\mathrm{e}^{-2x}$.

(1) 若 $x=a\neq 0$ 为 $f(x)$ 的极值点，判断 $x=a$ 是极大值点还是极小值点；

(2) 若 $f(x)$ 二阶连续可导，且 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点，判断 $x=0$ 是极大值点还是极小值点.

【37】求由方程 $x^2+y^3-xy=0$ 确定的函数在 $x>0$ 内的极值，并指出是极大值还是极小值.

【38】设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导，$f(0)=-2$，$f'(0)=1$，$f''(x)\geqslant 0$. 证明：$f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个根.

【39】就 k 的不同取值情况，确定方程 $x^3-3x+k=0$ 根的个数.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

40 设 $a>0$，讨论方程 $ae^x=x^2$ 根的个数.

41 设 $x>0$ 时，$\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}=a$ 有解，求 a 的取值范围.

42 求曲线 $y=\dfrac{x^2+3x+1}{x+1}e^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线.

43 设曲线 $L:y=2x\arctan x+\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$ 的渐近线.

44 设曲线 $L:y=e^x$，求曲线上的点，使得曲线在该点曲率最大.

45 设 $L:\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t,\end{cases}$ 求曲线在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 所对应的点处的曲率.

四 一元函数积分学

选择题 答案见解答册 216 页

1 设函数 $f(x)$ 连续，$F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，下列正确的是(　　).

(A) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 为奇函数

(B) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)$ 为偶函数

(C) 若 $f(x)$ 为增函数，则 $F(x)$ 为增函数

(D) 若 $f(x)$ 为周期函数，则 $F(x)$ 为周期函数

2 设 $f(x)$，$g(x)$ 是连续函数，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，令 $F(x)=\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t$，$G(x)=\int_0^1 xg(xt)\mathrm{d}t$，则当 $x\to 0$ 时，$F(x)$ 是 $G(x)$ 的(　　).

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C) 同阶但非等价无穷小　　(D) 等价无穷小

3 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t$，则 $F(x)$(　　).

(A) 为正常数　　(B) 为负常数

(C) 为零　　(D) 取值与 x 有关

4 设 $\alpha=\int_0^{5x}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，$\beta=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$，则当 $x\to 0$ 时，两个无穷小的关系是(　　).

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C) 同阶非等价无穷小　　(D) 等价无穷小

5 设 $g(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，其中 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x^2+1), & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{3}(x-1), & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 则 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 内(　　).

(A) 单调减少　　(B) 无界

(C) 连续　　(D) 有第一类间断点

6 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是以 T 为周期的连续奇函数，则下列函数中不是周期函数的是(　　).

(A) $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$　　(B) $\int_{-x}^a f(t)\mathrm{d}t$

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(C)$\int_{-x}^{0} f(t)\mathrm{d}t-\int_{x}^{0} f(t)\mathrm{d}t$　　(D)$\int_{-x}^{x} tf(t)\mathrm{d}t$

7 设函数 $f(x)$ 连续，下列变上限积分函数中，必为偶函数的是(　　).

(A)$\int_{0}^{x} t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$　　(B)$\int_{0}^{x} t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$

(C)$\int_{0}^{x} f(t^2)\mathrm{d}t$　　(D)$\int_{0}^{x} f^2(t)\mathrm{d}t$

8 $\int_{0}^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2\mathrm{d}x$ 的值(　　).

(A) 等于 0　　(B) 大于 0

(C) 小于 0　　(D) 不能确定

9 设 $I=\int_{-1}^{1}\frac{1+x}{1+x^4}\mathrm{d}x$，$J=\int_{-1}^{1}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x$，$K=\int_{-1}^{1}\frac{(x+1)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$，则(　　).

(A)$J<I<K$　　(B)$I<J<K$

(C)$K<I<J$　　(D)$I<K<J$

10 反常积分$\int_{1}^{+\infty}\frac{1+x}{x^a\ln^b x}\mathrm{d}x\,(a>0,b>0)$ 收敛，则(　　).

(A)$a>1,b>1$　　(B)$a>1,b<1$

(C)$a>2,b>1$　　(D)$a>2,b<1$

11 若由曲线 $y=2\sqrt{x}$，曲线上某点处的切线以及 $x=1,x=3$ 围成的平面区域的面积最小，则该切线是(　　).

(A)$y=\frac{x}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}$　　(B)$y=\frac{x}{2}+2$

(C)$y=x+1$　　(D)$y=\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}$

填空题 答案见解答册218页

1 设 $f(\sin^2 x)=\frac{x}{\sin x}$，则$\int\frac{f(x)}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x=$_____.

2 $\int\frac{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{4x}+\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x=$_____.

3 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4(1+x^2)}=$_____.

4 $\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=$_____.

5 $\int\frac{\sin x\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}{2+\sin^2 x}\mathrm{d}x=$_____.

6 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i+\sqrt{n^2-i^2}}=$_____.

7 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}=$_____.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

8 设 $f(x)$ 满足等式 $xf'(x)-f(x)=\sqrt{2x-x^2}$，且 $f(1)=4$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$_____.

9 设函数 $y=y(x)$ 满足 $\Delta y=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$，且 $y(1)=1$，则 $\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x=$_____.

10 设 $f(x)$ 满足 $f(x)=\sin^2\pi x+\sqrt{2x-x^2}\int_0^2 xf(x)\mathrm{d}x$，则 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=$_____.

11 $\int_0^2\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^{2n+1}}{1+x^{2n-1}}\right)\mathrm{d}x=$_____.

12 $\int_{-2}^2\dfrac{x+|x|}{2+x^2}\mathrm{d}x=$_____.

13 $\int_0^{\pi}x\dfrac{|\sin x\cos x|}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x=$_____.

14 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\mathrm{d}x=$_____.

15 $\int_0^{\pi}x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\,\mathrm{d}x=$_____.

16 $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}=$_____.

17 设 $\int_a^{2\ln 2}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}=\dfrac{\pi}{6}$，则 $a=$_____.

18 设 $f(x)=\int_0^x\mathrm{e}^{\cos t}\mathrm{d}t$，则 $\int_0^{\pi}f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=$_____.

19 设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\arctan x^2$，$f(1)=1$，则 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=$_____.

20 设连续非负函数 $f(x)$ 满足 $f(x)f(-x)=1$，则 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1+f(x)}=$_____.

21 $I(x)=\int_0^x\dfrac{2u-1}{u^2-u+1}\mathrm{d}u$ 在区间$[-1,1]$上的最大值为_____.

22 $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$ 上的平均值为_____.

23 设 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$，则 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=$_____.

24 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x=$_____.

25 曲线 $y=(x-1)(x-2)$ 与 x 轴所围成的区域绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积为_____.

解答题 答案见解答册 223 页

1 计算下列不定积分：

(1) $\int\dfrac{x+2}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$.

(2) $\int\dfrac{x+2}{(2x+1)^2}\mathrm{d}x$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(3)$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x-1)}$.　　(4)$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

2 计算下列不定积分：

(1)$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}$.　　(2)$\int \frac{\mathrm{d}x}{(5x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

3 计算下列不定积分：

(1)$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+3\cos^2 x}$.　　(2)$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$.

(3)$\int \frac{1+\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

4 计算下列不定积分：

(1)$\int \arcsin^2 x\,\mathrm{d}x$.　　(2)$\int \frac{\ln(1+x)+x}{x^2}\mathrm{d}x$.

(3)$\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\mathrm{d}x$.　　(4)$\int x^2\arctan x\,\mathrm{d}x$.

5 计算下列不定积分：

(1)$\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.　　(2)$\int \ln(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$.

6 计算下列不定积分：

(1)$\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$.　　(2)$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

7 计算下列定积分：

(1)$\int_0^2 (x^2+1)\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$.　　(2)$\int_{-2\pi}^{2\pi} (|x|+\sin x)\cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

(3)$\int_0^{\ln 2} \sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}\,\mathrm{d}x$.　　(4)$\int_0^{\pi} |\sin x+\cos x|\,\mathrm{d}x$.

(5)$\int_0^{n\pi} x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

8 $\int_{-2}^{2} (x^2+3x+4)\sqrt{4|x|-x^2}\,\mathrm{d}x$.

9 $\int_0^1 \frac{\arctan x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

10 $\int_0^2 \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$.

11 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)F(x)=\frac{x\mathrm{e}^x}{2(1+x)^2}$，又 $F(0)=1$，$F(x)>0$，求 $f(x)$.

12 设 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, 0<x\leqslant 1,\\ x, x>1,\end{cases}$ 求 $f(x)$.

13 计算下列定积分：

(1)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\mathrm{d}x$.　　(2)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^{\sqrt{2}} x}$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

14. 设 $f(x)=\int_1^x e^{t^2}\,dt$，求 $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx$.

15. 设 $\int_0^2 f(x)\,dx=4$，$f'(2)=1$，$f(2)=2$，求 $\int_0^1 x^2 f''(2x)\,dx$.

16. 设 $f(x)$ 连续，$\int_0^x tf(x-t)\,dt=1-\cos x$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

17. 计算下列反常积分：

(1) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.　　(2) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

(3) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^5\sqrt{x^2-2x}}$.

18. 设 $f''(x)\in C[0,1]$，且 $f(0)=f'(0)=0$，证明：$\int_0^1 (x-1)^2 f''(x)\,dx=2\int_0^1 f(x)\,dx$.

19. 设 $S(x)=\int_0^x |\cos t|\,dt$.

(1) 证明：当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时，$2n\leqslant S(x)<2(n+1)$；

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

20. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续、非负，且以 T 为周期，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}=\frac{\int_0^T f(x)\,dx}{T}$.

21. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=0$，$\int_0^1 f(x)\,dx=0$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$\int_0^\xi f(x)\,dx=\xi f(\xi).$$

22. 设 $f(x)$ 在 $(-a,a)(a>0)$ 内连续，且 $f'(0)=2$.

(1) 证明：对 $0<x<a$，存在 $0<\theta<1$，使得

$$\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^{-x} f(t)\,dt=x[f(\theta x)-f(-\theta x)];$$

(2) 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\theta$.

23. 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx\ (n\geqslant 2)$，证明：$\frac{1}{2(n+1)}<a_n<\frac{1}{2(n-1)}$.

24. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$ 有 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$. 证明：$\left|\int_a^b f(x)\,dx-(b-a)f(a)\right|\leqslant\frac{1}{2}(b-a)^2$.

25. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $0<m\leqslant f(x)\leqslant M$，对任意的 $x\in[0,1]$，证明：

$$\left(\int_0^1\frac{dx}{f(x)}\right)\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)\leqslant\frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

26. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加，证明：$\int_a^b xf(x)\,dx\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$.

27. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续且单调减少. 证明：

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx\leqslant\sum_{k=1}^n f(k)\leqslant f(1)+\int_1^n f(x)\,dx.$$

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

28. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续且单调减少. 证明：当 $0<k<1$ 时，$\int_0^k f(x)\mathrm{d}x \geqslant k\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

29. 设 $f(x)$ 有界，且 $f'(x)$ 连续，对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $|f(x)+f'(x)|\leqslant 1$. 证明：$|f(x)|\leqslant 1$.

30. 设 $f'(x)$ 在$[0,1]$上连续且 $|f'(x)|\leqslant M$. 证明：$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{2n}$.

31. 设 $f(x)$ 在$[0,a]$上一阶连续可导，$f(0)=0$，令 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}|f'(x)|=M$. 证明：$\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{a^2}{2}M$.

32. 设 $f'(x)$ 在$[0,1]$上连续，且 $f(1)-f(0)=1$. 证明：$\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant 1$.

33. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续可导，且 $f(a)=0$. 证明：

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

34. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续可导，且 $f(a)=f(b)=0$. 证明：

$$|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x\ (a<x<b).$$

35. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续可导，证明：

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

36. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导，且 $f''(x)<0$. 证明：$\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}x\leqslant f\left(\frac{1}{3}\right)$.

37. 设 $f(x)$ 在$[0,2]$上二阶可导，且 $f''(x)>0$，证明：

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x>2f(1).$$

38. 设 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上二阶可导且 $f''(x)\geqslant 0$. 证明：

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)].$$

39. 设 $f(x)\in C[0,1]$，$f(x)>0$. 证明积分不等式：$\ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x$.

40. 设区域 D 由曲线 $L:y=x^2\mathrm{e}^{-2x}\ (x\geqslant 0)$ 与 x 轴围成.

(1) 求区域 D 的面积；

(2) 求区域 D 绕 x 轴旋转而成的体积.

41. 求星形线 $L:x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 绕 x 轴旋转而成几何体的体积.

42. 设直线 $y=ax$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成的图形面积为 S_1，它们与直线 $x=1$ 所围成的图形面积为 S_2，且 $a<1$.

(1) 确定 a，使 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值；

(2) 求(1)中结论成立所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

43. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 所围成的公共部分的面积.

44. 设区域 D 由 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 与 x 轴围成，求区域 D 绕 $x=3$ 旋转而成的几何体的体积.

45. 一半椭圆形闸门，宽为 4 米，高为 1 米，水高度到闸门顶部，求水对闸门的压力.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

46 一打桩机将桩打入地下，每锤做功相等，土壤对桩的阻力与桩的深度称正比，阻力系数为 $k>0$. 已知第一锤桩入土深度 1 米，求第二锤桩进入土壤的深度.

47 为清除井底污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥提出井口. 设井深 30 m，抓斗自重 400 N，缆绳每米重 50 N，抓斗盛污泥2 000 N，提升速度为 3 m/s，在提升过程中，污泥以 20 N/s 的速度从抓斗中漏掉. 现将抓斗从井底提升到井口，问克服重力做功多少？

五 多元函数微分学

选择题 ▶答案见解答册 235 页

1 设 $f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^4}$，则 $f(x,y)$ 在(0,0) 处(　　).

(A) $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$ 都不存在

(B) $f'_x(0,0)$ 存在，$f'_y(0,0)$ 不存在

(C) $f'_x(0,0)$ 不存在，$f'_y(0,0)$ 存在

(D) $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$ 都存在

2 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在(0,0) 处(　　).

(A) 连续但不可偏导　　(B) 可偏导但不连续

(C) 可微　　(D) 一阶连续可偏导

3 对二元函数 $z=f(x,y)$，下列结论正确的是(　　).

(A) $z=f(x,y)$ 可微的充分必要条件是 $z=f(x,y)$ 有一阶连续的偏导数

(B) 若 $z=f(x,y)$ 可微，则 $z=f(x,y)$ 的偏导数连续

(C) 若 $z=f(x,y)$ 偏导数连续，则 $z=f(x,y)$ 一定可微

(D) 若 $z=f(x,y)$ 的偏导数不连续，则 $z=f(x,y)$ 一定不可微

4 设 $z=f(x,y)$ 为连续函数，且 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-3x-2y-1}{e^{(x-1)^2+y^2}-1}=-2$，则(　　).

(A) $f(x,y)$ 在(1,0) 处对 x 对 y 都不可偏导

(B) $f(x,y)$ 在(1,0) 处对 x 可偏导，对 y 不可偏导

(C) $f(x,y)$ 在(1,0) 处对 y 可偏导，对 x 不可偏导

(D) $f(x,y)$ 在(1,0) 处可微，且 $dz|_{(1,0)}=3dx+2dy$

5 设 $F(xz,yz)=0$，其中 F 连续可偏导，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$(　　).

(A) $F'_1+F'_2$　　(B) $xF'_1+yF'_2$　　(C) $-z$　　(D) z

填空题 ▶答案见解答册 236 页

1 设 $z=x^{2y}+y^{\sin^2 x}$，则 $dz=$_____.

2 设 $z=xf(x+y)+g(x^y,x^2+y^2)$，其中 f,g 分别二阶连续可导和二阶连续可偏导，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$_____.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(3) 设 $f(u,v)$ 一阶连续可偏导，$f(tx,ty)=t^3f(x,y)$，且 $f'_1(1,2)=1$，$f'_2(1,2)=4$，则 $f(1,2)=$_____.

(4) 设 $F(x+z,y+z)=0$ 确定函数 $z=z(x,y)$，其中 F 连续可偏导，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$_____.

(5) 设 $F(x,y,z)=0$，其中 F 连续可偏导且 $F'_x\cdot F'_y\cdot F'_z\neq 0$，则 $\dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=$_____.

(6) 设 $e^{x+2y-z}=1+xy^{\frac{3}{2}}z$ 确定函数 $z=z(x,y)$，则 $dz\big|_{(0,1)}=$_____.

(7) 设函数 $f(x,y)$ 连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-3}{(x-1)^2+(y+1)^2}=2$，则 $dz\big|_{(1,-1)}=$_____.

(8) 设 $z=f(x,y)$ 二阶可偏导，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$，且 $f(x,0)=1$，$f'_y(x,0)=x$，则 $f(x,y)=$_____.

(9) 设 $u=u(x,y)$ 二阶连续可偏导，且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，若 $u(x,3x)=x$，$u'_x(x,3x)=x^3$，则 $u''_{xy}(x,3x)=$_____.

(10) 设 $(ay-2xy^2)dx+(bx^2y+4x+3)dy$ 为某个二元函数的全微分，则 $a=$_____，$b=$_____.

解答题 ▶ 答案见解答册 238 页

(1) 设 $z=(x^2+y^2)^{\sec^2(x+y)}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(2) 设函数 $z=f(x^2+y^2,\sin x,y\cos x)$，且 f 二阶连续可偏导，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(3) 设 $z=f(e^{2t},\sin^2 t)$，其中 f 二阶连续可偏导，求 $\dfrac{d^2z}{dt^2}$.

(4) 设 $z=\int_0^{x^2+y^2}e^t dt$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

(5) 设 $f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2},&(x,y)\neq(0,0),\\ 0,&(x,y)=(0,0).\end{cases}$ 讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性与可微性.

(6) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2),&(x,y)\neq(0,0),\\ 0,&(x,y)=(0,0).\end{cases}$

(1) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续？ (2) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微？

(7) 设 $z=f(x,y)$ 连续可偏导，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-2x-y-3}{(x-1)^2+y^2}=1$，求

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(e^{2h},h)-f[1+\ln(1+h),-h]}{h}.$$

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

8. 设 $u=f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)$，其中 $f(s,t)$ 二阶连续可偏导，求 $\mathrm{d}u$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$.

9. 设函数 $f(x,y,z)$ 一阶连续可偏导且满足 $f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)$. 证明：

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z).$$

10. 设 $u=u(x,y)$ 由方程组 $u=f(x,y,z,t),g(y,z,t)=0,h(z,t)=0$ 确定，其中 f,g,h 连续可偏导且 $\frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\partial g}{\partial t}\cdot\frac{\partial h}{\partial z}\neq 0$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

11. 设函数 $z=f(u)$，方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x P(t)\mathrm{d}t$ 确定 u 为 x,y 的函数，其中 $f(u),\varphi(u)$ 可微，$P(t),\varphi'(u)$ 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$，求 $P(y)\frac{\partial z}{\partial x}+P(x)\frac{\partial z}{\partial y}$.

12. 设二元函数 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，其中 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的某邻域内连续. 证明：函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的充分必要条件是 $\varphi(0,0)=0$.

13. 设 $u=u(x,y,z)$ 连续可偏导，令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\sin\varphi,\\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\\ z=r\cos\varphi.\end{cases}$

(1) 若 $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$，证明：$u$ 仅为 θ 与 φ 的函数.

(2) 若 $\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z}$，证明：$u$ 仅为 r 的函数.

14. 设 $z=z(x,y)$ 满足 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$，令 $\begin{cases}u=x,\\ v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\end{cases}\varphi(u,v)=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$.

证明：$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=0$.

15. 已知二元函数 $f(x,y)$ 满足 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=4$，作变换 $\begin{cases}x=uv,\\ y=\frac{1}{2}(u^2-v^2),\end{cases}$ 且 $f(x,y)=g(u,v)$，若 $a\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2-b\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2=u^2+v^2$，求 a,b.

16. 求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在由 x 轴、y 轴及 $x+y=6$ 所围成的闭区域 D 上的最小值和最大值.

17. 求 $z=x^2+12xy+2y^2$ 在区域 $4x^2+y^2\leqslant 25$ 上的最值.

六 重积分

选择题 ▶答案见解答册 243 页

1. 设积分区域为 $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{2}\leqslant x+y\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\right\}$，$I=\iint_D\ln(x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，$J=$

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

$2\iint_D \sin x\cos y\,dx\,dy$，$K=\iint_D (e^{x+y}-1)dx\,dy$，则(　　).

(A)$K<I<J$　(B)$J<I<K$　(C)$I<K<J$　(D)$I<J<K$

2 累次积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\cos\theta} rf(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$ 等于(　　).

(A)$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$　(B)$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

(C)$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$　(D)$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$

3 设$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$，则$\iint_D \sin x\sin y\cdot\max\{x,y\}d\sigma$ 等于(　　).

(A)π　(B)$\frac{5\pi}{2}$　(C)$\frac{5\pi}{3}$　(D)$\frac{5\pi}{4}$

4 设$\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy=\frac{16}{3}\pi$，其中$D:x^2+y^2\leqslant a^2$，则$a$的值为(　　).

(A)1　(B)2　(C)$\sqrt{2}$　(D)$\sqrt{3}$

填空题 ▶答案见解答册 243 页

1 设$f(u)$为连续函数，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{2n}\frac{i+j}{n^3}f\left(\frac{2i-j}{n}\right)=$_____.

2 $\int_0^2 dx\int_x^2 e^{\frac{x}{y}}dy=$_____.

3 $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy\int_{|y|}^{\sqrt{4-y^2}}\frac{x+\sin^3 xy}{4+x^2+y^2}dx=$_____.

4 设区域$D=\{(x,y)\mid (x^2+y^2)^2\leqslant 4(x^2-y^2),x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，则$\iint_D 2xy\,dx\,dy=$_____.

5 设$f(x,y)$为连续函数，且$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-2x-2}{\sin\pi x+y^2}=-1$，则$\lim\limits_{r\to 0}\frac{\iint\limits_{(x-1)^2+4y^2\leqslant r^2} f(x,y)dx\,dy}{\int_0^{e^{r^2}-1}\frac{\tan 2t}{\arcsin t}dt}=$

_____.

6 设区域D由$x^2+y^2=1,x=1,y=x$围成，则$\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy=$_____.

7 设$f(x)>0$且连续，区域$D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，则

$\iint_D \frac{f(x)}{f(x)+f(y)}dx\,dy=$_____.

8 设$f(u)$连续，则$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x du\int_u^1 vf(u^2-v^2)dv=$_____.

9 设$f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}dt$，则$\int_0^{\pi} f(x)dx=$_____.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

10 设 $f(x)$ 连续，则 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{\int_0^r tf(r^2-t^2)\,dt}{\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}\cos(x+y)\,d\sigma}=$ _____.

11 设 $a>0$，$f(x)=g(x)=\begin{cases}a,0\leqslant x\leqslant 1,\\0,\text{其他},\end{cases}$ 而 D 表示整个平面，则

$I=\iint\limits_D f(x)g(y-x)\,dx\,dy=$ _____.

12 设 $f(x)=\begin{cases}x,0\leqslant x\leqslant 1,\\0,\text{其他},\end{cases}$ D 为 xOy 面，则 $\iint\limits_D f(y)f(x+y)\,dx\,dy=$ _____.

解答题 ▶答案见解答册 246 页

1 计算 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dy$.

2 已知 $f(x,y)=\begin{cases}1,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,\\0,\text{其他},\end{cases}$ 设 D 为由 $x=0$、$y=0$ 及 $x+y=t$ 所围成的区域，求 $F(t)=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$.

3 设 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=1$，令 $F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}f(x^2+y^2)\,dx\,dy\,(t\geqslant 0)$，求 $F''(0)$.

4 计算二重积分 $I=\int_0^1 dx\int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}-1}\dfrac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

5 计算 $\iint\limits_D(x^2+y^2)\,dx\,dy$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,x^2+y^2\geqslant 2x\}$.

6 计算 $\iint\limits_D(x+y^2)\,dx\,dy$，其中 $D:x^2+y^2\leqslant 2x+2y-1$.

7 设 $f(x,y)=\begin{cases}x^2y,1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant x,\\0,\qquad\text{其他},\end{cases}$ 且 $D:x^2+y^2\geqslant 2x$，求 $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$.

8 计算 $I=\iint\limits_D\sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy$，其中 $D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

9 计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{3}{16}}\min\left\{\sqrt{\dfrac{3}{16}-x^2-y^2},2(x^2+y^2)\right\}dx\,dy$.

10 计算 $I=\iint\limits_D xy\,dx\,dy$，其中 D 由 $y=-x$，$y=\sqrt{1-x^2}$ 及 $y=\sqrt{x-x^2}$ 围成.

11 计算 $I=\int_{-\sqrt{2}}^{0}dx\int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}}(x^2+y^2)\,dy+\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(x^2+y^2)\,dy$.

12 计算 $\iint\limits_D\sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy$，其中 D 为单位圆 $x^2+y^2=1$ 所围成的位于第一象限的部分.

13 计算二重积分 $\iint\limits_D(x^2+4x+y^2)\,dx\,dy$，其中 D 是曲线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 围成的区域.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

14 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_x^b f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2$.

15 设 $f(x,y),g(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上连续，且 $g(x,y)\geqslant 0$. 证明：存在 $(\xi,\eta)\in D$，使得

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

16 设函数 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(x)>0$，D 为区域 $a\leqslant x\leqslant b$，$a\leqslant y\leqslant b$. 证明：

$$\iint_D \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\geqslant (b-a)^2.$$

17 设 $f(x)$ 为连续函数，计算 $\iint_D x[\sqrt{1-x^2}+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=x^3$，$y=1$，$x=-1$ 围成的区域.

18 交换积分次序并计算 $\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\mathrm{d}y\ (a>0)$.

19 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调减少，且 $f(x)>0$. 证明：$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\leqslant\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$.

七 微分方程

选择题 ▶答案见解答册 250 页

1 设 $y_1(x),y_2(x)$ 为二阶齐次线性微分方程 $y''+a(x)y'+b(x)y=0$ 的两个解，则 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 为该方程通解的充分必要条件是(　　).

(A) $y'_1y_2+y_1y'_2$ 不恒为 0　　(B) $y'_1y_2+y_1y'_2\equiv 0$

(C) $y'_1y_2-y_1y'_2$ 不恒为 0　　(D) $y'_1y_2-y_1y'_2\equiv 0$

2 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-2y'-3y=(2x+1)\mathrm{e}^{-x}$ 的特解形式为(　　).

(A) $(ax+b)\mathrm{e}^{-x}$　(B) $x^2\mathrm{e}^{-x}$　　(C) $x^2(ax+b)\mathrm{e}^{-x}$　　(D) $x(ax+b)\mathrm{e}^{-x}$

3 微分方程 $y''+y'-2y=x^2+1+x\mathrm{e}^x$ 的特解形式为(　　).

(A) $y_0=ax^2+bx+c+(Ax+B)\mathrm{e}^x$

(B) $y_0=x(ax^2+bx+c)+(Ax+B)\mathrm{e}^x$

(C) $y_0=x(ax^2+bx+c)+x(Ax+B)\mathrm{e}^x$

(D) $y_0=ax^2+bx+c+x(Ax+B)\mathrm{e}^x$

4 $y_0=2+(3-2x)\mathrm{e}^{-x}$ 为某三阶常系数齐次线性微分方程的特解，则该方程为(　　).

(A) $y'''-2y''+y'=0$　　(B) $y'''+2y''+y'=0$

(C) $y'''-2y''+y=0$　　(D) $y'''+2y''+y=0$

5 设 $y(x)$ 是微分方程 $y''+(x-1)y'+x^2y=\mathrm{e}^x$ 满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=1$ 的解，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y(x)-x}{x^2}$(　　).

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(A) 等于 1　　(B) 等于 2　　(C) 等于 0　　(D) 不存在

6 设 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x)$ 为二阶非齐次线性方程 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$ 的三个线性无关解，则该方程的通解为(　　).

(A) $C_1[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)]+C_2\varphi_3(x)$

(B) $C_1[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)]+C_2\varphi_3(x)$

(C) $C_1[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)]+C_2[\varphi_1(x)-\varphi_3(x)]$

(D) $C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+C_3\varphi_3(x)$，其中 $C_1+C_2+C_3=1$

填空题 答案见解答册 251 页

1 设 $y=y(x)$ 满足 $\Delta y=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$，且有 $y(1)=1$，则 $\int_0^2 y(x)\mathrm{d}x=$_____.

2 微分方程 $y'-x\mathrm{e}^{-y}+\dfrac{1}{x}=0$ 的通解为_____.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

3 微分方程 $yy'-y^2=x$ 的满足初始条件 $y(0)=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 的特解为_____.

4 设连续函数 $f(x)(x\geqslant 0)$ 满足：$f(x)-\dfrac{2}{\pi}\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant x^2} f(x-\sqrt{u^2+v^2})\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}$，则 $f(x)=$_____.

5 以 $y=C_1\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x(C_2\cos x+C_3\sin x)$ 为通解的三阶常系数齐次线性微分方程为_____.

6 设 $y(x)$ 为微分方程 $y''-4y'+4y=0$ 满足初始条件 $y(0)=1,y'(0)=2$ 的特解，则 $\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x=$_____.

7 微分方程 $y''-2y'=2x+\cos x$ 的通解为_____.

8 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)-2\int_{\frac{1}{x}}^1 f(xt)\mathrm{d}t=x$，且 $f(1)=1$，则 $f(x)=$_____.

9 微分方程 $yy''-2(y')^2=0$ 的通解为_____.

解答题 答案见解答册 253 页

1 设 $f(x)$ 是连续函数.

(1) 求初值问题 $\begin{cases}y'+ay=f(x),\\ y(0)=0\end{cases}$ 的解，其中 $a>0$；

(2) 若 $|f(x)|\leqslant k$，证明：当 $x\geqslant 0$ 时，有 $|y(x)|\leqslant\dfrac{k}{a}(\mathrm{e}^{ax}-1)$.

2 设有微分方程 $y'-2y=\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)=\begin{cases}2,x<1,\\ 0,x>1,\end{cases}$ 求在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续的函数 $y(x)$，使其在 $(-\infty,1)$ 及 $(1,+\infty)$ 内都满足所给的方程，且满足条件 $y(0)=0$.

3 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x+2y}$ 的通解.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

4 利用变换 $x=\arctan t$ 将方程 $\cos^4 x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\cos^2 x(2-\sin 2x)\dfrac{dy}{dx}+y=\tan x$ 化为 y 关于 t 的方程，并求原方程的通解.

5 设 $f(x)$ 为偶函数，且满足 $f'(x)+2f(x)-3\int_0^x f(t-x)dt=-3x+2$，求 $f(x)$.

6 设二阶常系数线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 有特解 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$，确定常数 a，b，c，并求该方程的通解.

7 设 $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 且二阶连续可导，又 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$ 且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，求 $f(x)$.

8 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=1$，且 $f'(x)+f(x)-\dfrac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0$.

(1) 求 $f'(x)$；

(2) 证明：当 $x\geqslant 0$ 时，$e^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

9 设 $y=y(x)$ 二阶可导，且 $y'\neq 0$，$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(1) 将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\dfrac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 所满足的微分方程；

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 的解.

10 设函数 $f(x,y)$ 可微，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y)$，$f\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，且 $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(0,y+h)}{f(0,y)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{\cot y}$，求 $f(x,y)$.

11 设函数 $f(x)(x\geqslant 0)$ 可微，且 $f(x)>0$. 将曲线 $y=f(x)$，$x=1$，$x=a(a>1)$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周得旋转体体积为 $\dfrac{\pi}{3}[a^2f(a)-f(1)]$. 若 $f(1)=\dfrac{1}{2}$，求：(1) $f(x)$；(2) $f(x)$ 的极值.

12 设函数 $f(x)$ 满足 $xf'(x)-2f(x)=-x$，且由曲线 $y=f(x)$，$x=1$ 及 x 轴 $(x\geqslant 0)$ 所围成的平面图形为 D. 若 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积最小，求：

(1) 曲线 $y=f(x)$；

(2) 曲线在原点处的切线与曲线及直线 $x=1$ 所围成的平面图形的面积.

13 一条曲线经过点 $(2,0)$，且在切点与 y 轴之间的切线长为 2，求该曲线方程.

14 设曲线 L_1 与 L_2 皆过点 $(1,1)$，曲线 L_1 在点 (x,y) 处纵坐标与横坐标之商的变化率为 2，曲线 L_2 在点 (x,y) 处纵坐标与横坐标之积的变化率为 2，求两曲线所围成区域的面积.

15 用变量代换 $x=\sin t$ 将方程 $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}-4y=0$ 化为 y 关于 t 的方程，并求微分方程的通解.

16 用变量代换 $x=\ln t$ 将方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}+e^{2x}y=0$ 化为 y 关于 t 的方程，并求原方程的通解.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

17. 设非负函数 $f(x)$ 当 $x \geqslant 0$ 时连续可微，且 $f(0)=1$. 由 $y=f(x)$，x 轴，y 轴及过点 $(x,0)$ 且垂直于 x 轴的直线围成的图形的面积与 $y=f(x)$ 在 $[0,x]$ 上弧的长度相等，求 $f(x)$.

18. 设函数 $f(x)$ 二阶连续可导，$f(0)=1$ 且有 $f'(x)+3\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t+2x\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}=0$，求 $f(x)$.

19. 位于上半平面的上凹曲线 $y=y(x)$ 过点 $(0,2)$，在该点处的切线水平，曲线上任一点 (x,y) 处的曲率与 $\sqrt{y}$ 及 $1+y'^2$ 之积成反比，比例系数为 $k=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$，求 $y=y(x)$.

20. 设 $y=y(x)$ 是一向上凸的连续曲线，其上任意一点 (x,y) 处的曲率为 $\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$，又此曲线上的点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$，求该曲线方程，并求函数 $y(x)$ 的极值.

21. 某湖泊水量为 V，每年排入湖泊中内含污染物 A 的污水量为 $\dfrac{V}{6}$，流入湖泊内不含 A 的水量为 $\dfrac{V}{6}$，流出湖的水量为 $\dfrac{V}{3}$. 设 1999 年底湖中 A 的含量为 $5m_0$，超过国家规定指标. 为了治理污染，从 2000 年初开始，限定排入湖中含 A 污水的浓度不超过 $\dfrac{m_0}{V}$. 问至多经过多少年，湖中污染物 A 的含量降到 m_0 以内（设湖中 A 的浓度是均匀的）？

22. 飞机以匀速 v 沿 y 轴正向飞行，当飞机行至 O 时被发现，随即从 x 轴上点 $(x_0,0)$ 处发射一枚导弹向飞机飞去 $(x_0>0)$，若导弹方向始终指向飞机，且速度大小为 $2v$.

(1) 求导弹运行的轨迹满足的微分方程及初始条件；

(2) 导弹运行方程.

23. 细菌的增长率与总数成正比. 如果培养的细菌总数在 24 h 内由 100 增长到 400，求前 12 h 后的细菌总数.

24. 在 $t=0$ 时，两只桶内各装 10 L 的盐水，盐的浓度为 15 g/L，用管子以 2 L/min 的速度将净水输入到第一只桶内，搅拌均匀后的混合液又由管子以 2 L/min 的速度被输送到第二只桶内，再将混合液搅拌均匀，然后用 1 L/min 的速度输出. 求在任意时刻 $t>0$，从第二只桶内流出的水中含盐所满足的微分方程.

25. 某人的食量是 2 500 卡 / 天（1 卡 $=4.186\ 8$ 焦），其中 1 200 卡 / 天用于基本的新陈代谢. 在健身运动中，他所消耗的为 16 卡 / 千克 / 天乘以他的体重. 假设以脂肪形式储存的热量百分之百有效，而一千克脂肪含热量 10 000 卡，求该人体重怎样随时间变化.

26. 一条均匀链条挂在一个无摩擦的钉子上，链条长 18 m，运动开始时链条一边下垂 8 m，另一边下垂 10 m，问整个链条滑过钉子需要多长时间？

27. 质量为 1 g 的质点受外力作用作直线运动，外力和时间成正比，和质点的运动速度成反比，在 $t=10$ s 时，速度等于 50 cm/s. 外力为 $39.2\ \mathrm{g\cdot cm/s^2}$，问运动开始 1 min 后的速度是多少？

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

28. 早晨开始下雪整天不停，中午一辆扫雪车开始扫雪，每小时扫雪体积为常数，到下午2点扫雪2 km，到下午4点又扫雪1 km，问降雪是什么时候开始的？

29. 设 A 从原点出发，以固定速度 v_0 沿 y 轴正向行驶，B 从 $(x_0,0)$ 出发 $(x_0<0)$，以始终指向点 A 的固定速度 v_1 朝 A 追去，求 B 的轨迹方程.

30. 飞机在机场开始滑行着陆，在着陆时刻已失去垂直速度，水平速度为 v_0(m/s)，飞机与地面的摩擦系数为 μ，且飞机运动时所受空气的阻力与速度的平方成正比，在水平方向的比例系数为 k_x(kg·s²/m²)，在垂直方向的比例系数为 k_y(kg·s²/m²). 设飞机的质量为 m(kg)，求飞机从着陆到停止所需要的时间.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

第二部分 · 线性代数

一 行列式

选择题 ▶答案见解答册 261 页

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为两个 n 阶矩阵，下列结论正确的是(　　).

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$　　(B) 若 $|\boldsymbol{AB}|=0$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

(C) $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|-|\boldsymbol{B}|$　　(D) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是四维列向量，且 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|=m$，$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=n$，则 $|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|$ 为(　　).

(A) $m+n$　　(B) $m-n$　　(C) $-(m+n)$　　(D) $n-m$

填空题 ▶答案见解答册 261 页

1. 设 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\7&7&7&3&3\\3&2&4&5&2\\3&3&3&2&2\\4&6&5&2&3\end{vmatrix}$，则 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=$_____.

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是三阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，且 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A}|=0$，则 $|\boldsymbol{B}^{-1}+2\boldsymbol{E}|=$_____.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶正交阵，且 $|\boldsymbol{A}|<0$，$|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=-4$，则 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}|=$_____.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$，则 $|(k\boldsymbol{A})^{*}|=$_____.

解答题 ▶答案见解答册 262 页

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|<0$. 证明：$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$.

2. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是非零矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|$ 中每个元素 a_{ij} 与其代数余子式 A_{ij} 相等. 证明：$|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

3. 计算 $D_{2n}=\begin{vmatrix}a&&&&&b\\&\ddots&&&\iddots&\\&&a&b&&\\&&b&a&&\\&\iddots&&&\ddots&\\b&&&&&a\end{vmatrix}$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

4 计算 $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$ $(a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n)$.

5 设 $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$，求 $A_{k1}+A_{k2}+\cdots+A_{kn}$.

6 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，$\lambda_1=1,\lambda_2=2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值，$|\boldsymbol{B}|=2$，求 $\begin{vmatrix} (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & (2\boldsymbol{B})^* \end{vmatrix}$.

二 矩 阵

选择题 ▶答案见解答册263页

1 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 阶矩阵，则(　　).

(A) 当 $m>n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$　　(B) 当 $m>n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}|=0$

(C) 当 $n>m$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$　　(D) 当 $n>m$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}|=0$

2 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 皆为可逆矩阵，则 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}$ 等于(　　).

(A)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$　　(B)$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$

(C)$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$　　(D)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$

3 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶可逆矩阵，则(　　).

(A)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*$　　(B)$(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$

(C)$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{B}^*$　　(D)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^*$ 一定可逆

4 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，k 为常数，则 $(k\boldsymbol{A})^*$ 等于(　　).

(A)$k\boldsymbol{A}^*$　　(B)$k^n\boldsymbol{A}^*$　　(C)$k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$　　(D)$k^{n(n-1)}\boldsymbol{A}^*$

5 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则下列成立的是(　　).

(A)$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$　　(B)$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$

(C) 若 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$　　(D) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$

6 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，且 $r(\boldsymbol{A})=m<n$，则(　　).

(A)$\boldsymbol{A}$ 的任意 m 个列向量都线性无关

(B)$\boldsymbol{A}$ 的任意 m 阶子式都不等于零

(C) 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 一定有无穷多个解

(D) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 通过初等行变换一定可以化为 $(\boldsymbol{E}_m\vdots\boldsymbol{O})$

7 设 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{P}_1^m\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2^n=\begin{pmatrix} a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{pmatrix}$，则 m,n 可取(　　).

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(A)$m=3,n=2$　　(B)$m=3,n=5$

(C)$m=2,n=3$　　(D)$m=2,n=2$

8 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\c_1&c_2&c_3&c_4\\d_1&d_2&d_3&d_4\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_4&a_3&a_2&a_1\\b_4&b_3&b_2&b_1\\c_4&c_3&c_2&c_1\\d_4&d_3&d_2&d_1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 为(　　).

(A)$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　　(B)$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_2$

(C)$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$　　(D)$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1$

9 设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{Q}$ 为三阶非零矩阵,且 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$,则(　　).

(A) 当 $t=6$ 时,$r(\boldsymbol{Q})=1$　　(B) 当 $t=6$ 时,$r(\boldsymbol{Q})=2$

(C) 当 $t\neq 6$ 时,$r(\boldsymbol{Q})=1$　　(D) 当 $t\neq 6$ 时,$r(\boldsymbol{Q})=2$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

填空题 ▶答案见解答册 264 页

1 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是三阶矩阵,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&0\\1&2&3\end{pmatrix}$,且满足$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{ABA}+2\boldsymbol{A}^2$,则 $\boldsymbol{B}=$_____.

2 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}$,且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&&&\\&-2&&\\&&&1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{B}=$_____.

3 $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{21}\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{20}=$_____.

4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&t&9\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵,$r(\boldsymbol{B}^*)=1$ 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则 $t=$_____.

5 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&a&-1\\4&2&a\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 为三阶矩阵,且 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$,则 $r(\boldsymbol{B})=$_____.

解答题 ▶答案见解答册 265 页

1 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维非零列向量. 证明:

(1)$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量;

(2) 当 $\boldsymbol{\alpha}$ 是单位向量时 $\boldsymbol{A}$ 为不可逆矩阵.

2 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异矩阵,$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维列向量,b 为常数,$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*&|\boldsymbol{A}|\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&b\end{pmatrix}$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(1) 计算 PQ;

(2) 证明 PQ 可逆的充分必要条件是 $\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha \neq b$.

3 设矩阵 A 满足 $(2E-C^{-1}B)A^{\mathrm{T}}=C^{-1}$,且 $B=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,$C=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,求矩阵 A.

4 设 α,β 是 n 维非零列向量,$A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}+\beta\alpha^{\mathrm{T}}$. 证明:$r(A)\leqslant 2$.

5 设 α 是 n 维单位列向量,$A=E-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$. 证明:$r(A)<n$.

6 设 A 为 n 阶矩阵,证明:$r(A^*)=\begin{cases}n, r(A)=n,\\1, r(A)=n-1,\\0, r(A)<n-1,\end{cases}$ 其中 $n\geqslant 2$.

7 设 A 为 n 阶矩阵,证明:$r(A)=1$ 的充分必要条件是存在 n 维非零列向量 α,β,使得 $A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$.

8 设 A 为 n 阶矩阵且 $r(A)=n-1$. 证明:存在常数 k,使得 $(A^*)^2=kA^*$.

9 设 A 是 $n(n\geqslant 3)$ 阶矩阵,证明:$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

10 设 A,B 分别为 $m\times n$ 及 $n\times s$ 阶矩阵,且 $AB=O$. 证明:$r(A)+r(B)\leqslant n$.

三 向 量

选择题 答案见解答册 267 页

1 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关,且向量 α_4 不可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,则下列结论正确的是(　　).

(A)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关　　(B)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

(C)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关　　(D)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性相关

2 设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 经初等行变换变为矩阵 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$,且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关,则(　　).

(A)β_4 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示

(B)β_4 能由 β_1,β_2,β_3 线性表示,但表示法不唯一

(C)β_4 能由 β_1,β_2,β_3 线性表示,且表示法唯一

(D)β_4 能否由 β_1,β_2,β_3 线性表示不能确定

3 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$,其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 n 维列向量. 若对于任意不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,皆有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$,则(　　).

(A)$m>n$

(B)$m=n$

(C) 存在 m 阶可逆阵 P,使得 $AP=\begin{pmatrix}E_m\\O\end{pmatrix}$

(D) 若 $AB=O$,则 $B=O$

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

4 下列命题正确的是(　　).

(A) 若向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵,则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_n$ 线性无关

(B) 若向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中任一向量都可由其余向量线性表示

(C) 若向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1$ 一定线性无关

(D) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 个 n 维向量且线性无关,$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵,且 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_n$ 线性无关,则 $\boldsymbol{A}$ 一定可逆

5 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充分必要条件是(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中任意两个向量不成比例

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是两两正交的非零向量组

(C) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$,方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中向量的个数小于向量的维数

6 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,且 $m>n$,下列命题正确的是(　　).

(A)$\boldsymbol{A}$ 的行向量组一定线性无关

(B) 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=b$ 一定有无穷多组解

(C)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 一定可逆

(D)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=n$

7 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的任意两个非零阵,则必有(　　).

(A)$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

(B)$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

(C)$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

(D)$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

8 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 为两个 n 维向量组,且 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=r$,则(　　).

(A) 两个向量组等价

(B)$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=r$

(C) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,则两向量组等价

(D) 两向量组构成的矩阵等价

填空题 ▶答案见解答册 268 页

1 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\5\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\0\\3\\-1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\7\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组为_____,其余的向量用极大线性无关组表示为_____.

解答题 ▶答案见解答册 268 页

1 设向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$;(Ⅱ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$;(Ⅲ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$,若向量组(Ⅰ)与向量组(Ⅱ)的秩为 3,而向量组(Ⅲ)的秩为 4. 证明:向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 4.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 个 n 维线性无关的向量，$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵. 证明：$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 个 n 维列向量，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，$\boldsymbol{\beta}$ 不是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，证明：$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 个 n 维向量，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是任一 n 维向量总可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，而 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. 证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

7. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 为三维列向量组，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都线性无关.

(1) 证明：至少存在一个非零向量可同时由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示；

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，求出可由两组向量同时线性表示的向量.

四 线性方程组

选择题 ▶答案见解答册270页

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times s$ 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $s\times n$ 阶矩阵，则方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 同解的充分条件是(　　).

(A) $r(\boldsymbol{A})=s$　　(B) $r(\boldsymbol{A})=m$

(C) $r(\boldsymbol{B})=s$　　(D) $r(\boldsymbol{B})=n$

2. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$，且非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有两个不同解 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$，则下列命题正确的是(　　).

(A) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$

(B) $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解

(C) 方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $k(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)$

(D) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)$

3. 设有方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 阶矩阵，下列四个命题：

(1) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解都是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $r(\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{B})$

(2) 若 $r(\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解都是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解

(3) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解，则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$

(4) 若 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

以上命题正确的是(　　).

(A)(1)(2)　　(B)(1)(3)

(C)(2)(4)　　(D)(3)(4)

4 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 阶矩阵,则(　　).

(A) 当 $m>n$ 时,线性齐次方程组 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解

(B) 当 $m>n$ 时,线性齐次方程组 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

(C) 当 $n>m$ 时,线性齐次方程组 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解

(D) 当 $n>m$ 时,线性齐次方程组 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

5 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵,则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充分必要条件是(　　).

(A)$r(\boldsymbol{A})=m$

(B)$r(\boldsymbol{A})=n$

(C)$\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵

(D)$r(\boldsymbol{A})=n$ 且 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示

填空题 ▶答案见解答册 270 页

1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&b\\0&a&-2\\1&4&-2\end{pmatrix}$,且存在三阶非零矩阵 $\boldsymbol{B}$,使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则 $a=$_____,

$b=$_____.

2 设 $\boldsymbol{\eta}$ 为非零向量,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-3&3\\2&4&1\\3&3a+2&-1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\eta}$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解,则 $a=$_____,方程组的通解为_____.

解答题 ▶答案见解答册 271 页

1 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 为 n 维线性无关的列向量组,且与非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 正交. 证明:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

2 设齐次线性方程组 $\begin{cases}ax_1+bx_2+\cdots+bx_n=0,\\bx_1+ax_2+\cdots+bx_n=0,\\\quad\vdots\\bx_1+bx_2+\cdots+ax_n=0,\end{cases}$ 其中 $ab\neq 0,n\geqslant 2$. 讨论 a,b 取何值时,方程组只有零解、有无穷多个解?在有无穷多个解时求出其通解.

3 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的第一行元素为 a,b,c 且不全为零,又 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,求方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

4 a,b 取何值时,方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\x_2+2x_3+2x_4=1,\\-x_2+(a-3)x_3-2x_4=b,\\3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$ 有解?

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

5 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵且 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})<n$. 证明：方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 有公共的非零解.

6 设(Ⅰ)$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\ x_2-x_4=0,\end{cases}$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{b}$ 的四个解，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\5\\8\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\4\\5\\5\end{pmatrix},r(\boldsymbol{B})=2.$$

(1) 求方程组(Ⅰ)的基础解系；

(2) 求方程组(Ⅱ)$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系；

(3)(Ⅰ)与(Ⅱ)是否有公共的非零解？若有公共解求出其公共解.

7 设(Ⅰ)$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\ x_2-x_4=0,\end{cases}$ (Ⅱ)$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\ x_2-x_3+x_4=0.\end{cases}$

(1) 求(Ⅰ),(Ⅱ)的基础解系； (2) 求(Ⅰ),(Ⅱ)的公共解.

8 (Ⅰ)$\begin{cases}-2x_1+x_2+ax_3-5x_4=1,\\ x_1+x_2-x_3+bx_4=4,\\ 3x_1+x_2+x_3+2x_4=c,\end{cases}$ (Ⅱ)$\begin{cases}x_1+x_4=1,\\ x_2-2x_4=2,\\ x_3+x_4=-1,\end{cases}$ 问 a,b,c 取何值时，(Ⅰ),(Ⅱ)为同解方程组？

9 证明线性方程组(Ⅰ)$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}$ 有解的充分必要条件是方程组

(Ⅱ)$\begin{cases}a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m=0,\\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m=0,\\ \vdots\\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m=0\end{cases}$ 与(Ⅲ)$\begin{cases}a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m=0,\\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m=0,\\ \vdots\\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m=0,\\ b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_my_m=0\end{cases}$ 是同解方程组.

10 设(Ⅰ)$\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1,2n}x_{2n}=0,\\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2,2n}x_{2n}=0,\\ \vdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{n,2n}x_{2n}=0\end{cases}$ 的一个基础解系为 $\begin{pmatrix}b_{11}\\b_{12}\\\vdots\\b_{1,2n}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_{21}\\b_{22}\\\vdots\\b_{2,2n}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}b_{n1}\\b_{n2}\\\vdots\\b_{n,2n}\end{pmatrix}$，

写出(Ⅱ)$\begin{cases}b_{11}y_1+\cdots+b_{1,2n}y_{2n}=0,\\ b_{21}y_1+\cdots+b_{2,2n}y_{2n}=0,\\ \vdots\\ b_{n1}y_1+\cdots+b_{n,2n}y_{2n}=0\end{cases}$ 的通解并说明理由.

11 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times s$ 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $s\times n$ 阶矩阵，且 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{AB})$. 证明：方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组.

12 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 都是 n 阶矩阵，$r(\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{DB})=n$.

(1) 证明：$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=n$；

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(2) 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 与 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 分别为方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 的基础解系，证明：$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 线性无关.

13. 设 A 为 n 阶矩阵，$A_{11}\neq 0$. 证明：非齐次线性方程组 $AX=b$ 有无穷多个解的充分必要条件是 $A^*b=0$.

14. 证明：$r(AB)\leqslant \min\{r(A),r(B)\}$.

15. 证明：$r(A)=r(A^TA)$.

16. 设 A 是 $m\times n$ 阶矩阵，且非齐次线性方程组 $AX=b$ 满足 $r(A)=r(\overline{A})=r<n$. 证明：方程组 $AX=b$ 的线性无关的解向量的个数最多是 $n-r+1$ 个.

17. 讨论方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2-x_3=1,\\ x_1-x_2+x_3=b,\\ 2x_1+2x_2+bx_3=2\end{cases}$ 的解的情况，在方程组有解时求出其解，其中 a,b 为常数.

18. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a&4&0\\-1&0&c\\1&b&1\end{pmatrix}$，问 a,b,c 为何值时，矩阵方程 $AX=B$ 有解？有解时求出全部解.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

五 矩阵的特征值和特征向量

选择题 答案见解答册 277 页

1. 设三阶矩阵 A 的特征值为 $-1,1,2$，其对应的特征向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，令 $P=(3\alpha_2,-\alpha_3,2\alpha_1)$，则 $P^{-1}AP$ 等于(　　).

(A) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$

2. 设 A,B 为 n 阶矩阵，且 A,B 的特征值相同，则(　　).

(A) A,B 相似于同一个对角矩阵　　(B) 存在正交阵 Q，使得 $Q^TAQ=B$

(C) $r(A)=r(B)$　　(D) 以上都不对

3. 设 A 是 n 阶矩阵，下列命题错误的是(　　).

(A) 若 $A^2=E$，则 -1 一定是矩阵 A 的特征值

(B) 若 $r(E+A)<n$，则 -1 一定是矩阵 A 的特征值

(C) 若矩阵 A 的各行元素之和为 -1，则 -1 一定是矩阵 A 的特征值

(D) 若 A 是正交矩阵，且 A 的特征值之积小于零，则 -1 一定是 A 的特征值

4. 与矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的矩阵为(　　).

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(A) $\begin{pmatrix}2&2&-1\\0&2&3\\0&0&5\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$

5 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，下列结论正确的是(　　).

(A) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值的个数相等

(B) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似于同一对角阵

(C) 若 $r(\boldsymbol{A})=r<n$，则 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行变换可化为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$

(D) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，则 $\boldsymbol{A}$ 的秩与其非零特征值的个数相等

6 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，则(　　).

(A) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$

(B) 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$

(C) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 与同一个对角矩阵相似

(D) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$

填空题 ▶答案见解答册 278 页

1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$|\boldsymbol{A}|>0$ 且 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $-1,-2,2$，则 $a_{11}+a_{22}+a_{33}=$_____.

2 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-\frac{1}{2},\lambda_3=\frac{1}{2}$，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，令 $\boldsymbol{P}=(2\boldsymbol{\alpha}_3,-3\boldsymbol{\alpha}_1,-\boldsymbol{\alpha}_2)$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}=$_____.

3 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个不同特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 分别是属于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量，若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2),\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$ 线性无关，则 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 满足_____.

4 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是三维线性无关的列向量，$\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵，且 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$，则 $|\boldsymbol{A}|=$_____.

5 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1=(a,-a,1)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，$\boldsymbol{\alpha}_2=(a,1,1-a)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $a=$_____.

6 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&-2&a-3\\0&0&1\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，则 $a=$_____.

7 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，则 $a=$_____.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

解答题 ▶答案见解答册 280 页

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，$r(\boldsymbol{A})=r(0<r<n)$. 求 $|5\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|$.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&1&2\\1&0&0\end{pmatrix}$ 相似于对角阵.

求：(1)a 及可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵；　(2)$\boldsymbol{A}^{100}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，且 $\lambda=2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&2\\0&1&2&0\\0&0&-1&b\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ 有四个线性无关的特征向量，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量，并求 $\boldsymbol{A}^{2010}$.

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 有解但不唯一.

(1) 求 a；

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵；

(3) 求正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角阵.

6. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&a&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$.

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 有一个特征值为 3，求 a；

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-1&-1\\3&a&-1\\4&-2&b\end{pmatrix}$ 可逆，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}^*$ 对应的特征向量.

(1) 求 a，b 及 $\boldsymbol{\alpha}$ 对应的 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值；

(2) 判断 $\boldsymbol{A}$ 可否对角化.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，ξ_1,ξ_2,ξ_3 是三维线性无关的列向量，且

$$\boldsymbol{A}\xi_1=-\xi_1+2\xi_2+2\xi_3,\quad \boldsymbol{A}\xi_2=2\xi_1-\xi_2-2\xi_3,\quad \boldsymbol{A}\xi_3=2\xi_1-2\xi_2-\xi_3.$$

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值；　(2) 求 $|\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}|$.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，且有三个互异的正的特征值，设矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}^*)^2-4\boldsymbol{E}$ 的特征值为 0，5，32. 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值并判断 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是否可对角化.

10. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&c\\0&b&0\\-4&c&1-a\end{pmatrix}$ 的一个特征值为 $\lambda_1=2$，其对应的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

(1) 求常数 a，b，c；

(2) 判断 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化，若可对角化，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵. 若不可对

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

角化，说明理由.

11 设二维非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是二阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{A\alpha}$ 线性无关；

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，讨论 $\boldsymbol{A}$ 可否对角化；

12 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为三个三维线性无关的列向量，且满足

$$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2.$$

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；

(2) 判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可否对角化.

13 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，若 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的三个不同的特征值，证明：

(1)$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$；

(2) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$ 同时为对角矩阵.

14 (1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆且 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，证明：$\boldsymbol{A}^*\sim\boldsymbol{B}^*$；

(2) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，证明：存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{AP}\sim\boldsymbol{BP}$.

15 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&2\\a&1&a-2\\-3&0&4\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，求 a 及 $\boldsymbol{A}^n$.

16 设方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\2x_1+(a+2)x_2+(a+1)x_3=a+3,\\x_1+2x_2+ax_3=3\end{cases}$ 有无穷多个解，

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-a\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-1$ 的特征向量.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$；(2) 求 $|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{E}|$.

17 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和为 5，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解且 $\lambda_1=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，对应特征向量为 $(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的其他特征值与特征向量；

(2) 求 $\boldsymbol{A}$.

18 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&5&-2\\0&-2&a\end{pmatrix}\sim\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&b&0\\0&0&6\end{pmatrix}$，求 a,b 及正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

19 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})<n$. 证明：$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有公共的特征向量.

20 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_n\neq\boldsymbol{0}$，若

$$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_{n-1}=\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{A\alpha}_n=\boldsymbol{0}.$$

(1) 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关；

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

21 设 A 为三阶方阵，A 的每行元素之和为 5，$AX=0$ 的通解为 $k_1\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$，

设 $\beta=\begin{pmatrix}4\\3\\-3\end{pmatrix}$，求 $A\beta$.

22 $A=\begin{pmatrix}a&b&2\\-1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\sim B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\0&4&-1\end{pmatrix}$，求 a,b 及可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$.

23 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-a\\2&a&-2\\-a&-1&1\end{pmatrix}$，求 A 的特征值与特征向量，判断矩阵 A 是否可对角化，若可对角化，求出可逆矩阵 P 及对角阵.

六 二次型

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

选择题 ▶答案见解答册 288 页

1 设 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&5&-4\\0&-4&5\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 A 与 B（　　）.

(A) 合同且相似　　(B) 相似但不合同

(C) 合同但不相似　　(D) 既不相似又不合同

2 设 A 是三阶实对称矩阵，若对任意的三维列向量 X，有 $X^TAX=0$，则（　　）.

(A) $|A|=0$　　(B) $|A|>0$

(C) $|A|<0$　　(D) 以上都不对

填空题 ▶答案见解答册 289 页

1 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=X^TAX$ 的正惯性指数是 2，且 $A^2-2A=O$，该二次型的规范形为_____.

解答题 ▶答案见解答册 289 页

1 设 A 为 $m\times n$ 阶实矩阵，且 $r(A)=n$. 证明：A^TA 的特征值全大于零.

2 设 A 为 n 阶正定矩阵. 证明：对任意的可逆矩阵 P，P^TAP 为正定矩阵.

3 设 P 为可逆矩阵，$A=P^TP$. 证明：A 是正定矩阵.

4 设 A,B 为 n 阶正定矩阵. 证明：$A+B$ 为正定矩阵.

5 三元二次型 $f=X^TAX$ 经过正交变换化为标准形 $f=y_1^2+y_2^2-2y_3^2$，且 A^*+2E 的非零特征值对应的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，求此二次型.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

6 设二次型 $f=2x_1^2+2x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2+2bx_1x_3+2x_2x_3$ 经过正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 化为标准形 $f=y_1^2+y_2^2+4y_3^2$，求参数 a,b 及正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

7 设齐次线性方程组 $\begin{cases}(a+3)x_1+x_2+2x_3=0,\\ 2ax_1+(a-1)x_2+x_3=0,\\ (a-3)x_1-3x_2+ax_3=0\end{cases}$ 有非零解，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & a & -2\\ 2 & -2 & 9\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，求 a，并求当 $|\boldsymbol{X}|=\sqrt{2}$ 时 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 的最大值.

8 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都大于零. 证明：$\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

9 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶正定矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 阶实矩阵. 证明：$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 正定的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{B})=n$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

精选试题

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

第一部分 · 高等数学

(一) 函数、极限、连续

1. 下列为奇函数的是(　　).

(A) $f(x)=\begin{cases}x, & |x|>1,\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -1, & -1<x<0\end{cases}$　　(B) $\varphi(x)=\begin{cases}x, & |x|\geqslant 1,\\ 1, & 0\leqslant x<1,\\ -1, & -1<x<0\end{cases}$

(C) $g(x)=\begin{cases}e^x, & x\geqslant 0,\\ -\dfrac{1}{e^x}, & x<0\end{cases}$　　(D) $h(x)=\begin{cases}e^x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -e^{-x}, & x<0\end{cases}$

2. 设当 $x\to 0$ 时,$e^x-(ax^2+bx+1)$ 是 x^2 的高阶无穷小,则(　　).

(A) $a=\dfrac{1}{2},b=1$　　(B) $a=1,b=1$

(C) $a=-\dfrac{1}{2},b=1$　　(D) $a=-1,b=1$

3. 设 $\alpha=\int_0^{5x}\dfrac{\sin t}{t}dt,\beta=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{7}}dt$,当 $x\to 0$ 时,α 是 β 的(　　).

(A) 低阶无穷小　　(B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小　　(D) 同阶但非等价的无穷小

4. 当 $x\to 0$ 时,$x-\sin x$ 是 x^2 的(　　).

(A) 低阶无穷小　　(B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小　　(D) 同阶但非等价的无穷小

5. 设 $y=f(x)$ 由 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 确定,则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{2}{n}\right)-1\right]=$(　　).

(A)2　　(B)1　　(C) -1　　(D) -2

6. 设 $f(x)=\sqrt{x+|x|}$,则 $f[f(x)]=$_____.

7. 设 $a>0,b>0$ 都是常数,则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=$_____.

8. 若 $x\to 0$ 时,$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 为等价无穷小,则 $a=$_____.

9. 当 $x\to 0$ 时,$3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 与 x^n 为同阶无穷小,则 $n=$_____.

10. 若当 $x\to\dfrac{1}{2}^+$ 时,$\pi-3\arccos x\sim a\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^b$,则 $a=$_____,$b=$_____.

11. 设 $x\to 0$ 时,$\ln\cos ax\sim -2x^b(a>0)$,则 $a=$_____,$b=$_____.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}=9$，则 $a=$_____.

13. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{\ln(1-2x)+c(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=2$，则 $a=$_____.

14. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{2\sin x}=$_____.

15. 设 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]}{n^2}=$_____.

16. 若 $a>0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x-\sin x}\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)\tan 3x\right]$，则 $a=$_____.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x\dfrac{1}{x^5}[\mathrm{e}^{-(tx)^2}-1]\mathrm{d}t=$_____.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+\frac{1}{n}}+\dfrac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n+\frac{2}{n}}+\cdots+\dfrac{\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n+\frac{n}{n}}\right]=$_____.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{nx^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x=$_____.

20. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$_____.

21. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{2x^2}-2\mathrm{e}^{x^2}+1}, & x\neq 0,\\ A, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $A=$_____.

22. 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$.

23. 设 $f(x)=2\ln x$，$f[\varphi(x)]=\ln(1-\ln x)$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

24. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ x-4, & x>1.\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 1,\\ x+4, & x>1.\end{cases}$ 讨论 $x=1$ 处 $f[g(x)]$ 的连续性.

25. 设 $f(x)$ 连续可导，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，$F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t$，且当 $x\to 0$ 时，$F'(x)$ 与 x^k 为同阶无穷小，求 k.

26. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+2x-3}$.

27. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$.

28. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin x-x^2\cos x}{\cos 2x\ln(1-2x)}$.

29. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin^2\frac{\pi x}{2}}$.

30. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(31) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-e^{x}+1}{1-\sqrt{1-x^{2}}}$.

(32) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^{2}}{2}}}{\arctan^{2}x[2x+\ln(1-2x)]}$.

(33) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)\ln(1-x)-\ln(1-x^{2})}{x^{4}}$.

(34) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^{2}}+\sqrt{1-x^{2}}-2}{\sqrt{1+x^{4}}-1}$.

(35) 设 $a>0,b>0$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}}{a+b}\right)^{\frac{1}{x}}$.

(36) 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 3x+e^{2x})^{\frac{1}{\ln(1-x)}}$.

(37) 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^{2})}}$.

(38) 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x-\ln(1+x)}}$.

(39) 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^{2}+2x+3}+\sqrt{x^{2}-2x}+x+1}{\sqrt{x^{2}+x+2}-x}$.

(40) 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x$.

(41) 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^{x}}{1-x+\ln x}$.

(42) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^{2}}}{e^{x^{2}}-\cos x}$.

(43) 求 $\lim\limits_{x\to-1^{+}}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{1+x}}$.

(44) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3+x)^{x}-3^{x}}{x^{2}}$.

(45) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+3x^{4}}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}$.

(46) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{x}{2n}+\cos\dfrac{x}{n}\right)^{n}$.

(47) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{\int_{0}^{\tan x}\sqrt{\sin t}\,dt}{\int_{0}^{\sin x}\sqrt{\tan t}\,dt}$.

(48) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_{0}^{x}\dfrac{\sin t}{t}dt\right)^{2}}{x^{2}}$.

(49) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2}}\int_{0}^{x}\dfrac{1}{t}\ln(1+xt)\,dt$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

50 设 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=0, f'(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t}{\sin x - x\cos x}$.

51 设 $F(x)=\int_0^x t\sin(x^2-t^2)\mathrm{d}t$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^4}$.

52 设 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0, f'(0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$.

53 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4n+1}+\dfrac{1}{4n+2}+\cdots+\dfrac{1}{4n+n}\right)$.

54 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+16}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+4n^2}}\right)$.

55 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1+\sqrt{n^2-1}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)+\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right]$.

56 设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{3^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

57 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}\right]=2$，求 $f(0)$ 及 $f'(0)$.

58 设 $f(x)$ 连续可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\mathrm{e}^{f(x)}-1}=1$，求 $f''(0)$.

59 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right]}{3^x-1}=5$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

60 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，且 $f(x_0)\neq 0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)}{f(x_0)}\right]^n=\mathrm{e}^{\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}}$.

61 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}x\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{2tx}$，求 $f'(x)$.

62 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}, & x<0,\\ \dfrac{1}{x}[\ln x-\ln(x+x^2)], & x>0,\end{cases}$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，求 a.

63 设 $f(x)=\dfrac{1+2x-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1-x+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$，研究 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

64 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{1}{x-t}}$，求 $f(x)$ 的连续区间及间断点.

65 求函数 $y=\dfrac{x}{\ln|1-x|}$ 的间断点，并进行分类.

66 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有定义，且 $\mathrm{e}^x f(x)$ 与 $\mathrm{e}^{-f(x)}$ 在 $(0,1)$ 内都是单调增函数，证明：$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

67 设 $f(x)=\begin{cases}a, & x<-1,\\ -x, & x\geqslant -1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x, & x<1,\\ b, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 若 $F(x)=f(x)+g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，求 a,b.

二 一元函数微分学

1 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$ 等于(　　).

(A) $f'(a)$　　(B) $2f'(a)$　　(C) 0　　(D) $f'(2a)$

2 $F(x)=\cos x\mid \sin 2x\mid$ 在 $(0,2\pi)$ 内(　　).

(A) 有一个不可导点　　(B) 有两个不可导点

(C) 有三个不可导点　　(D) 可导

3 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{3}, & x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1.\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处(　　).

(A) 极限不存在　　(B) 极限存在但不连续

(C) 连续但不可导　　(D) 可导

4 设 $f(x)$ 可导，且 $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$ 在 $x=0$ 处可导，则(　　).

(A) $f(0)=0$　　(B) $f'(0)=0$

(C) $f(0)=f'(0)$　　(D) $f(0)=-f'(0)$

5 设 $f(x)$ 可导，则下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$

(B) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$

(D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

6 若曲线 $y=x^2+ax+b$ 与曲线 $2y=-1+xy^3$ 在 $(1,-1)$ 处相切，则(　　).

(A) $a=3,b=1$　　(B) $a=1,b=3$

(C) $a=-1,b=-1$　　(D) $a=1,b=1$

7 设 $f(x)$ 二阶连续可导且满足 $f''(x)+f'^2(x)=2x$，且 $f'(0)=0$，则(　　).

(A) $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点

(B) $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

(C) $(0,f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $x=0$ 既非 $f(x)$ 的极值点，$(0,f(0))$ 也非 $y=f(x)$ 的拐点

8 若函数 $f(-x)=f(x)(-\infty<x<+\infty)$，在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$ 且 $f''(x)<0$，则在 $(0,+\infty)$ 内有(　　).

(A) $f'(x)>0,f''(x)<0$　　(B) $f'(x)>0,f''(x)>0$

(C) $f'(x)<0,f''(x)<0$　　(D) $f'(x)<0,f''(x)>0$

9 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f'(x)>0,f''(x)>0$，又 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$，则当 $\Delta x>0$ 时有(　　).

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(A)$\Delta y > dy > 0$　　(B)$\Delta y < dy < 0$

(C)$dy > \Delta y > 0$　　(D)$dy < \Delta y < 0$

10 设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则下列命题错误的是(　　).

(A) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 为奇函数

(B) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)$ 为偶函数

(C) 若 $f(x)$ 为以 T 为周期的偶函数，则 $F(x)$ 为以 T 为周期的奇函数

(D) 若 $f(x)$ 为以 T 为周期的奇函数，则 $F(x)$ 为以 T 为周期的偶函数

11 设 $f(x)$ 为连续的奇函数，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，则(　　).

(A)$x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

(B)$x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点

(C) 曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线平行于 x 轴

(D) 曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线不平行于 x 轴

12 设偶函数 $f(x)$ 有连续的二阶导数，并且 $f''(0)\neq 0$，则 $x=0$(　　).

(A) 不是函数的驻点　　(B) 一定是函数的极值点

(C) 一定不是函数的极值点　　(D) 不能确定是否是函数的极值点

13 曲线$\begin{cases}x=t^2+7,\\ y=t^2+4t+1\end{cases}$上 $t=1$ 对应点处的曲率半径为(　　).

(A)$\dfrac{\sqrt{10}}{50}$　　(B)$\dfrac{\sqrt{10}}{100}$　　(C)$10\sqrt{10}$　　(D)$5\sqrt{10}$

14 下列曲线有斜渐近线的是(　　).

(A)$y=x+\sin\dfrac{1}{x}$　　(B)$y=x^2+\sin x$

(C)$y=\sin\dfrac{1}{x}$　　(D)$y=x^2+\sin^2 x$

15 设 $f(x)=\begin{cases}ax+b, x\leqslant 1,\\ x^3, \quad x>1\end{cases}$可导，则 $a=$_____，$b=$_____.

16 $y=\sqrt{x^2+4x+8}$ 的斜渐近线为_____.

17 函数 $y=x2^x$ 的极小值点为_____.

18 函数 $y=x+2\cos x$ 在$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上的最大值为_____.

19 设函数 $y=y(x)$ 由 $e^{2x+y}-\cos xy=e-1$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 对应点处的法线方程为_____.

20 椭圆 $2x^2+y^2=3$ 在点$(1,-1)$处的切线方程为_____.

21 设 $f(x)=3x^2+x^2|x|$，求使得 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n.

22 设函数 $y=y(x)$ 可导并满足 $y''+(x-1)y'+x^2y=e^x$，且 $y'(0)=1$，若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y(x)-x}{x^2}=a$，求 a.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

【23】设 $f(x)$ 是以 4 为周期的可导函数，$f(1)=\frac{1}{4}$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{f(1-x)-f(1+x)}=\frac{1}{2}$，求 $y=f(x)$ 在 $(5,f(5))$ 处的法线方程.

【24】设 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 在原点相切，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{nf\left(\frac{2}{n}\right)}$.

【25】设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义，$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$，$f'(0)=a$，求 $f(x)$.

【26】设 $f(x)$ 可导，$y=f(\cos^2 x)$，当 $x=-\frac{\pi}{4}$ 处取增量 $\Delta x=-0.2$ 时，Δy 的线性部分为 0.2，求 $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

【27】设 $y=x^{\sin 2x}$，求 y'.

【28】设 $y=\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{1-x}}$，求 y'.

【29】设 $y=x(\sin x)^{\cos x}$，求 $\mathrm{d}y$.

【30】设函数 $y=y(x)$ 由 $2^{xy}=x+y$ 确定，求 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}$.

【31】设函数 $y=y(x)$ 由 $x+y=\tan y$ 确定，求 $\mathrm{d}y$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【32】设 $y=y(x)$ 由 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 确定，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}$.

【33】求 $2y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 确定的函数 $y=y(x)$ 的微分 $\mathrm{d}y$.

【34】设由 $\sin xy+\ln(y-x)=x$ 确定函数 $y=y(x)$，求 $y'(0)$.

【35】设由 $\mathrm{e}^{-y}+x(y-x)=1+x$ 确定 $y=y(x)$，求 $y''(0)$.

【36】设 $y=y(x)$ 由 $x-\int_1^{x+y}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=0$ 确定，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}$.

【37】设 $\sin y+x\mathrm{e}^y=0$，当 $y=0$ 时，求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

【38】设 $y=y(x)$ 由 $\int_0^y\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=1(x>0)$ 所确定，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

【39】设 $x=x(t)$ 由 $\sin t-\int_t^{x(t)}\varphi(u)\mathrm{d}u=0$ 确定，$\varphi(0)=\varphi'(0)=1$ 且 $\varphi(u)>0$ 为可导函数，求 $x''(0)$.

【40】证明：曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2}$ 上任一点的切线的横截距与纵截距之和为 2.

【41】设函数 $y=y(x)$ 由方程组 $\begin{cases}x+t(1-t)=0,\\ t\mathrm{e}^y+y+1=0\end{cases}$ 确定，求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=0}$.

【42】设 $x=\int_0^t\mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s$，$y=\int_0^t\sin(t-s)^2\mathrm{d}s$，求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

【43】求 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 对应 $r=1+\cos\theta$ 上点处的切线.

【44】设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\cos t^2,\\ y=t\cos t^2-\int_0^{t^2}\frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u\end{cases}(t>0)$ 确定，求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

45 设 $f(x)=\int_0^{g(x)}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$，其中 $g(x)=\int_0^{\cos x}(1+\sin^2 t)\mathrm{d}t$，求 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

46 设 $y=\mathrm{e}^x\sin x$，求 $y^{(n)}$.

47 设 $y=\frac{3-3x}{2x^2+x-1}$，求 $y^{(n)}$.

48 设 $y=\frac{x}{x^2-1}$，求 $y^{(n)}$.

49 $f(x)=x^4\ln(1-x)$，当 $n>4$ 时，求 $f^{(n)}(0)$.

50 设 $y=x^2\ln(1+2x)$，求 $y^{(5)}$.

51 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(3-x^2), & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{x}, & x>1,\end{cases}$ 求(0,2)内使得 $f(2)-f(0)=2f'(\xi)$ 成立的 ξ.

52 设 $f(x)$ 在[0,3]上连续，在(0,3)内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$，证明：存在 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

53 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导($a>0$)且 $f(a)=0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\frac{b-\xi}{a}f'(\xi)$.

54 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$，使得

$$f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi.$$

55 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，在 $(-a,a)$ 内可导，且 $f(-a)=f(a)(a>0)$，证明：存在 $\xi\in(-a,a)$，使得 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

56 设函数 $f(x)$ 在[0,1]上可微，且满足 $f(1)=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda}xf(x)\mathrm{d}x\ (0<\lambda<1)$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$.

57 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且 $f(1)=f(0)=f'(1)=f'(0)=0$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f''(\xi)=f(\xi)$.

58 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，$f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，证明：(1) 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$；

(2) 在 (a,b) 内至少存在一点 $\eta(\eta\neq\xi)$，使得 $f''(\eta)=f(\eta)$.

59 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶可导，且 $f(1)=1$，证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；(2) 存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

60 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$\frac{4}{\pi}[f(1)-f(0)]=(1+\xi^2)f'(\xi).$$

61 设 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上二阶连续可导，且 $f'(0)=0$，证明：存在 $\xi,\eta,\zeta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

$$\frac{f'(\xi)}{\eta \sin 2\xi}=\frac{\pi}{2}f''(\zeta).$$

62 若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可微，且 $f(0)=f(1)$，$|f''(x)|\leqslant 1$，证明：$|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}$ 在 $[0,1]$ 上成立.

63 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)<1$，证明：$2x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=1$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根.

64 证明：方程 $x^a=\ln x\ (a<0)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个根.

65 设 $f_n(x)=C_n^1\cos x-C_n^2\cos^2 x+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^n\cos^n x$，证明：对任意自然数 n，方程 $f_n(x)=\frac{1}{2}$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内有且仅有一个根.

66 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续、单调减少且 $f(x)>0$，证明：存在 $c\in(0,1)$，使得

$$\int_0^c f(x)\mathrm{d}x=(1-c)f(c).$$

67 求在 $x=1$ 时有极大值 6，在 $x=3$ 时有极小值 2 的三次多项式.

68 求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 的最小值和最大值.

69 设 $f(x)$ 为 $[-2,2]$ 上连续的偶函数，且 $f(x)>0$，$F(x)=\int_{-2}^{2}|x-t|f(t)\mathrm{d}t$，求 $F(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的最小值点.

70 求函数 $f(x)=\int_0^x\frac{2t-1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t$ 在 $[0,1]$ 上的最大值和最小值.

71 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ 的极小值.

72 设 $y=f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0,\\ x+1, & x\leqslant 0,\end{cases}$

(1) 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性；(2) $f(x)$ 在何处取得极值？

73 设 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0,\\ x\mathrm{e}^x+1, & x\leqslant 0.\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的极值.

74 设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 $f''(x)+g(x)f'(x)-f(x)=0$，又 $f(a)=f(b)=0$，证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为零.

75 求函数 $y=(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调区间与极值，并求该曲线的渐近线.

76 设 $y=y(x)$ 由 $x^2y^2+y=1(y>0)$ 确定，求函数 $y=y(x)$ 的极值.

77 求 $f(x)=\int_0^1|x-t|\mathrm{d}t$ 在 $[0,1]$ 上的最大值、最小值.

78 当 $x>0$ 时，证明：$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{1+x}$.

79 当 $x>0$ 时，证明：$\int_0^x(t-t^2)\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$（$n$ 为自然数）.

80 证明：当 $0<x<1$ 时，$\mathrm{e}^{-2x}>\frac{1-x}{1+x}$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

81 求 $y=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ 的渐近线.

三 一元函数积分学

1 记 $P=\int_{-1}^{1}\ln|x+\sqrt{x^2+1}|\,\mathrm{d}x$，$Q=\int_{-1}^{1}(x^3\cos x-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x$，$R=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$，则(　　).

(A) $P<Q<R$　　(B) $Q<R<P$

(C) $Q<P<R$　　(D) $R<P<Q$

2 (1) 下列广义积分收敛的是(　　).

(A) $\int_{1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$　　(B) $\int_{1}^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$　　(C) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$　　(D) $\int_{-\infty}^{-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

(2) 下列广义积分发散的是(　　).

(A) $\int_{-1}^{1}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$　　(B) $\int_{-1}^{1}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4}}$

(C) $\int_{1}^{+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$　　(D) $\int_{0}^{+\infty}x^{10}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

3 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$，则 $\int xf'(x)\,\mathrm{d}x=$_____.

4 已知 $F(x)$ 为函数 $f(x)$ 的一个原函数，且 $f(x)=\dfrac{F(x)}{\sqrt{1+x^2}}$，则 $f(x)=$_____.

5 设 $f'(\sin^2 x)=\cos 2x+\tan^2 x$，则 $f(x)=$_____$(0<x<1)$.

6 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(5-x)\sqrt{1-x}}=$_____.

7 $\int\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=$_____.

8 设 $f(x)=x+\int_{0}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x$，$a\neq 1$，则 $\int_{0}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=$_____.

9 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$，则 L 所围成的平面图形的面积为_____.

10 区域 $D:(x^2+y^2)^2\leqslant x^2-y^2$ 所围成的面积为_____.

11 设 $f'(\ln x)=1+x$，且 $f(0)=1$，求 $f(x)$.

12 设 $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$，且 $f(0)=1$，求 $f(x)$.

13 设 $f'(\ln x)=\begin{cases}\mathrm{e}, 1\leqslant x\leqslant\mathrm{e},\\ x, x>\mathrm{e}.\end{cases}$ 又 $f(1)=\mathrm{e}$，求 $f(x)$.

14 设 $x>0$，可微函数 $y=f(x)$ 与反函数 $x=g(y)$ 满足 $\int_{0}^{f(x)}g(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}(x^{\frac{3}{2}}-8)$，求 $f(x)$.

15 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，且其反函数为 $g(x)$. 若 $\int_{0}^{f(x)}g(t)\,\mathrm{d}t=x^2\mathrm{e}^x$，

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

求 $f(x)$.

16 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可微，且 $f(0)=0$，又 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 1,\\ \sqrt{x}, & x>1,\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的表达式.

17 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\sqrt{1+\ln^2 x}}$.

18 求不定积分 $\int \frac{x^{14}}{(x^5+1)^4}\mathrm{d}x$.

19 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$.

20 求不定积分 $\int x^3 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.

21 求不定积分 $\int \sin^4 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$.

22 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x}$.

23 求不定积分 $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$.

24 求不定积分 $\int \frac{x-1}{2x^2+x-1}\mathrm{d}x$.

25 求不定积分 $\int \frac{x+1}{x(1+x\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x$.

26 求不定积分 $\int \frac{1+\ln(1-x)}{x^2}\mathrm{d}x$.

27 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-4}}$.

28 求不定积分 $\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$.

29 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin^3\frac{i-1}{n}$.

30 设连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=1-\cos x$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

31 设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+x^3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

32 已知 $f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

33 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

34 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x$.

35 计算定积分 $\int_0^1 x\arcsin x\,\mathrm{d}x$.

36 计算定积分 $\int_{-a}^{a}(x-a)\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

37. 计算定积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x+\cos x^2)\sin x\,\mathrm{d}x$.

38. 计算定积分$\int_{-2}^{2}\left(x^3\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

39. 计算定积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\mathrm{d}x$.

40. 计算定积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$.

41. 设连续非负函数$f(x)$满足$f(x)f(-x)=1$,求$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

42. 计算定积分$\int_{-1}^{2}x\,\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x$.

43. 计算定积分$\int_{0}^{3}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$.

44. 计算定积分$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}$.

45. 计算定积分$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{(\cos x+2\sin x)^2}$.

46. 计算定积分$\int_{0}^{1}\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x$.

47. 计算定积分$\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}$.

48. 计算定积分$\int_{0}^{1}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

49. 计算定积分$\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

50. 计算定积分$\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

51. 计算定积分$\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

52. 计算定积分$\int_{0}^{\pi}\frac{x|\sin x\cos x|}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$.

53. 计算定积分$\int_{0}^{2\pi}(\sin x+\cos x)\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$.

54. 计算积分$\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x^2-1}}$.

55. 计算定积分$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\cot x)^3}$.

56. 计算定积分$\int_{0}^{\pi}x\ln(\sin x)\mathrm{d}x$.

57. 计算积分$\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{1+x}+\mathrm{e}^{3-x}}$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

58 计算积分$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}$.

59 计算积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$.

60 证明:$\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x$,并用此式计算$\int_0^1 x(1-x)^{50}\mathrm{d}x$.

61 设$f(x)=\begin{cases}x\sin x, & x>0,\\ -1, & x\leqslant 0.\end{cases}$求$\int_0^{2\pi}f(x-\pi)\mathrm{d}x$.

62 设$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & x>0,\end{cases}$求$\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x$.

63 设$f'(x)=\arcsin(x-1)^2$且$f(0)=0$,求$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

64 设$f(u)$是连续函数,证明:$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$,并求$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

65 设$f(x)$在区间$[0,1]$上可积,当$0\leqslant x<y\leqslant 1$时,$|f(x)-f(y)|\leqslant|\arctan x-\arctan y|$,又$f(1)=0$,证明:$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{2}\ln 2$.

66 证明:$\int_0^{\pi}xa^{\sin x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{-\cos x}\mathrm{d}x\geqslant\frac{\pi^3}{4}$,其中$a>0$为常数.

67 证明:$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x<1+\frac{1}{2\mathrm{e}}$.

68 设$f(x),g(x)$为$[a,b]$上连续的增函数$(0<a<b)$,证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

69 设$f(x)$在$[0,1]$上可导,且$|f'(x)|<M$,证明:$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{2n}$.

70 设函数$f(x)$在$[0,2\pi]$上连续可微,$f'(x)\geqslant 0$,证明:对任意正整数n,有

$$\left|\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{n}[f(2\pi)-f(0)].$$

71 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是导数连续的有界函数,$|f(x)-f'(x)|\leqslant 1$,证明:

$$|f(x)|\leqslant 1.$$

72 设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导,且$f''(x)<0$,证明:$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$.

73 已知$f(x)$在$[0,2]$上二阶连续可微,$f(1)=0$,证明:$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M}{3}$,其中$M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f''(x)|$.

74 计算曲线$y=\int_0^x\sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t\,(0\leqslant x\leqslant\pi)$的弧长.

75 设$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$,直线$l:x+y=t(t\geqslant 0)$,$S(t)$为正方形区域$D$位于$l$左下方的面积,求$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t\,(x\geqslant 0)$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

76 求曲线 $y=2e^{-x}(x\geqslant 0)$ 与 x 轴所围成的图形的面积.

77 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的非负函数，且 $f(x)\int_0^x f(x-t)dt=\sin^4 x$，求 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的平均值.

78 设抛物线 $y=ax^2+bx+c(a<0)$ 满足：(1) 过点(0,0)及(1,2)；(2) 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与抛物线 $y=-x^2+2x$ 所围图形的面积最小，求 a,b,c 的值.

79 设 $f(x)=\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt(x>-1)$，求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的平面区域的面积.

80 求曲线 $y=xe^{-x}(x\geqslant 0)$ 绕 x 轴旋转一周所得延展到无穷远的旋转体的体积.

81 设由 y 轴、$y=x^2(x\geqslant 0)$ 及 $y=a(0<a<1)$ 所围成的平面图形及由 $y=a$，$y=x^2$ 及 $x=1$ 所围成的平面图形都绕 x 轴旋转，所得旋转体的体积相等，求 a.

82 设曲线 $y=a\sqrt{x}(a>0)$ 与曲线 $y=\frac{1}{2}\ln x$ 在点 (x_0,y_0) 处有公共的切线，求：

(1) 常数 a 及切点坐标；

(2) 两曲线与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

四 多元函数微分学

1 函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处偏导数存在，则在该点处函数 $f(x,y)$(　　).

(A) 有极限　　(B) 连续

(C) 可微　　(D) 以上结论均不成立

2 设 $f(x,y,z)=e^x yz^2$，其中 $z=z(x,y)$ 是由 $x+y+z+xyz=0$ 确定的隐函数，则 $f'_x(0,1,-1)=$_____.

3 已知 $z=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$_____.

4 设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$_____.

5 设 $f(x,y)$ 可微，$f(1,2)=2$，$f'_x(1,2)=3$，$f'_y(1,2)=4$，$\varphi(x)=f(x,f(x,2x))$，则 $\varphi'(1)=$_____.

6 设 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{f(x,y)+3x-4y}{x^2+y^2}=2$，则 $2f'_x(0,0)+f'_y(0,0)=$_____.

7 由 $x=ze^{y+z}$ 确定 $z=z(x,y)$，则 $dz|_{(e,0)}=$_____.

8 设 $f(x,y)=\begin{cases}y\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 试讨论 $f(x,y)$ 在点(0,0)处的连续性，可偏导性和可微性.

9 设二元函数 $f(x,y)$ 的二阶偏导数连续，且满足 $f''_{xx}(x,y)=f''_{yy}(x,y)$，$f(x,2x)=x^2$，$f'_x(x,2x)=x$，求 $f''_{xx}(x,2x)$.

10 设 $z=\arctan\frac{x+y}{x-y}$，求 dz.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

(11) 设 $z=(x^2+y^2)^{-\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$，求 $\mathrm{d}z$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(12) 设 $z=x^2\arctan\dfrac{y}{x}-y^2\arctan\dfrac{x}{y}$，求 $\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(13) 设 $z=f(\mathrm{e}^x\sin y,x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(14) 已知 $u(x,y)=yf\left(\dfrac{x}{y}\right)+xg\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中 f,g 具有二阶连续导数，求 $xu''_{xx}+yu''_{xy}$.

(15) 设 $z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)+g(\mathrm{e}^x,\sin y)$，其中 f 二阶连续可导，g 二阶连续可偏导，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(16) 设 $z=f(u,x,y)$，$u=x\mathrm{e}^y$，其中 f 具有二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(17) 设 $z=f(2x-y,y\sin x)$，其中 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(18) 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f\left(xy,\dfrac{x^2-y^2}{2}\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

(19) 设 $z=yf(x^2-y^2)$，求 $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(20) 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定(F 为可微函数)，求 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(21) 设 $z=xf(x,u,v)$，其中 $\begin{cases}u=\ln\cos x,\\ v=x^{\sin y},\end{cases}$ 其中 f 连续可偏导，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(22) 设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $z-y-x+x\mathrm{e}^{z-y-x}=0$ 所确定的二元函数，求 $\mathrm{d}z$.

(23) 设 $\varphi(u,v,w)$ 有一阶连续的偏导数，$z=z(x,y)$ 是由 $\varphi(bz-cy,cx-az,ay-bx)=0$ 确定的函数，求 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(24) 设 $z=z(x,y)$ 是由 $f(y-x,yz)=0$ 确定的，其中 f 对各个变量有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

(25) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2=xyf(z^2)$ 确定，其中 f 可微，求 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 的最简表达式.

(26) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x=f(y+z,y+x)$ 所确定，其中 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\mathrm{d}z$.

(27) 若 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$，且满足 $z(x,0)=x$，$z(0,y)=y^2$，求 $z(x,y)$.

(28) 设 $z=f(x,y)$ 二阶连续可偏导，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$，且 $f(x,0)=1$，$f'_y(x,0)=x$，求 $f(x,y)$.

(29) 设 $f(x,y)$ 二阶连续可偏导，$g(x,y)=f(\mathrm{e}^{xy},x^2+y^2)$，且

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

$$f(x,y)=1-x-y+o(\sqrt{(x-1)^2+y^2}),$$

证明：$g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处取极值，并判断是极大值还是极小值，求出极值.

30 试求 $z=f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ 在矩形闭域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,-1\leqslant y\leqslant 2\}$ 上的最大值、最小值.

31 求函数 $f(x,y)=4x-4y-x^2-y^2$ 在区域 $D:x^2+y^2\leqslant 18$ 上的最大值和最小值.

32 求函数 $z=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,y\geqslant 0\}$ 上的最小值与最大值.

33 求 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $\begin{cases}x^2+y^2=z,\\ x+y+z=4\end{cases}$ 下的最小值和最大值.

五 重积分

1 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr$ 可以写成(　　).

(A) $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx$　　(B) $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

(C) $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$　　(D) $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)dy$

2 $\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D e^{x^2-2y^2}\cos(2x+y)dx\,dy=$_____，其中 $D:x^2+y^2\leqslant r^2$.

3 设 $f(x,y)$ 为连续函数，且 $f(x,y)=y^2+x\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}f(x,y)dx\,dy$，则 $f(x,y)=$_____.

4 设区域 D 为 $x^2+y^2\leqslant R^2$，则 $\iint\limits_D\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)dx\,dy=$_____.

5 交换积分次序 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{2-x}f(x,y)dy=$_____.

6 交换积分次序，则 $\int_0^2 dx\int_0^{\frac{x^2}{2}}f(x,y)dy+\int_2^{2\sqrt{2}}dx\int_0^{\sqrt{8-x^2}}f(x,y)dy=$_____.

7 交换积分次序 $\int_0^{\frac{1}{4}}dy\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_y^{\frac{1}{2}}f(x,y)dx=$_____.

8 $\int_0^1 dy\int_0^{y^2}y\cos(1-x)^2dx=$_____.

9 设 $f(x)=\begin{cases}x,0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0,\text{其他},\end{cases}$ D 为 $-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$，

则 $\iint\limits_D f(y)f(x+y)dx\,dy=$_____.

10 求 $\int_1^3 dx\int_{x-1}^2 e^{y^2}dy$.

11 将积分 $\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy$ 化成极坐标形式，其中 D 为 $x^2+y^2=-8x$ 所围成的区域.

12 已知 $f(x)$ 可导，且满足 $f(t)=\int_0^t dx\int_0^x\dfrac{1}{t-y}f(y)dy+1$，求 $f(x)$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

13 求极限 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\int_2^x \mathrm{d}t\int_t^x \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u}{(x-2)^2}$.

14 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，并设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=a$，求 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$.

15 计算 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid y\geqslant 0,x^2+y^2\leqslant 1,x^2+y^2\leqslant 2x\}$.

16 设 $f(x,y)=\begin{cases}x^2y,1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant x,\\ 0,\quad\text{其他.}\end{cases}$ 求 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 2x\}$.

17 设 $D:|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1$，求 $\iint\limits_D |y-x|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

18 计算 $\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

19 计算 $\iint\limits_D |x^2+y^2-4|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D:x^2+y^2\leqslant 9$.

20 计算 $\iint\limits_D (4-x^2-y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 为由圆 $x^2+y^2=2y$ 所围成的平面闭区域.

21 设 D 是由 $x\geqslant 0,y\geqslant x$ 与 $x^2+(y-b)^2\leqslant b^2,x^2+(y-a)^2\geqslant a^2(0<a<b)$ 所围成的平面区域，求 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

22 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x\}$，求 $\iint\limits_D \sqrt{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

23 计算 $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D:x^2+y^2\leqslant x+y$.

24 设 $f(x,y)=\begin{cases}x^2, & |x|+|y|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1\leqslant |x|+|y|\leqslant 2,\end{cases}$ 求 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 2\}$.

25 计算二次积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{x,y\}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

26 设 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=0,f'(0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\int_0^t yf(t-y)\mathrm{d}y}$，其中 $D:x^2+y^2\leqslant t^2$.

六 微分方程

1 微分方程 $y''-y=\mathrm{e}^x+1$ 的一个特解应具有形式(式中 a,b 为常数)(　　).

(A) $a\mathrm{e}^x+b$　　(B) $ax\mathrm{e}^x+b$

(C) $a\mathrm{e}^x+bx$　　(D) $ax\mathrm{e}^x+bx$

2 在下列微分方程中以 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ (C_1,C_2,C_3 为任意常数) 为通解的

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

是(　　).

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$

3 设函数 $\varphi(u)$ 可导且 $\varphi(0)=1$,二元函数 $z=\varphi(x+y)e^{xy}$ 满足 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$,则 $\varphi(u)=$_____.

4 设函数 $y=y(x)$ 满足 $\Delta y=\frac{(2y+1)x}{x^2+1}\Delta x+o(\Delta x)$,且 $y(0)=0$,求函数 $y=y(x)$.

5 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,且对任意实数 a,b,都有等式 $f(a+b)=e^af(b)+e^bf(a)$ 成立,又 $f'(0)=1$,求 $f(x)$.

6 设当 $u>0$ 时 $f(u)$ 一阶连续可导,且 $f(1)=0$,又二元函数 $z=f(e^x-e^y)$ 满足 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$,求 $f(u)$.

7 求微分方程 $xy\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$ 满足条件 $y|_{x=e}=2e$ 的特解.

8 求微分方程 $x\frac{dy}{dx}=y(\ln y-\ln x)$ 的通解.

9 求微分方程 $y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x(x^2+1)}$ 的通解.

10 求微分方程 $xy'+(1-x)y=e^{2x}(x>0)$ 满足 $\lim\limits_{x\to0^+}y(x)=1$ 的特解.

11 求微分方程 $y'+y\cos x=(\ln x)e^{-\sin x}$ 的通解.

12 求微分方程 $x\frac{dy}{dx}-2y=x\ln x$ 满足初始条件 $y(1)=0$ 的特解.

13 求微分方程 $(1-x^2)y''-xy'=0$ 满足初始条件 $y(0)=0,y'(0)=1$ 的特解.

14 已知微分方程 $y'+y=f(x)$,其中 $f(x)=\begin{cases}2,0\leqslant x\leqslant1,\\0,\quad x>1.\end{cases}$ 求该微分方程满足 $y(0)=0$ 的解.

15 解方程 $(3x^2+2)y''=6xy'$,已知其解与 $e^x-1(x\to0)$ 为等价无穷小.

16 求微分方程 $yy''+(y')^2=0$ 满足初始条件 $y(0)=1,y'(0)=\frac{1}{2}$ 的特解.

17 设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-3y'+2y=2e^x$,且其图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$ 在该点的切线重合,求函数 $y=y(x)$.

18 求微分方程 $y''-y=4\cos x+e^x$ 的通解.

19 设连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^1[f(x)+xf(xt)]dt$ 与 x 无关,求 $f(x)$.

20 设 $f(x)$ 二阶可导,且 $\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(x-t)dt=x$,求 $f(x)$.

21 设 $u=f(\ln\sqrt{x^2+y^2})$ 满足 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$,求 $f(t)$ 的表达式.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

第二部分 · 线性代数

一 选择题

1 已知 $2n$ 阶行列式 D 的某一列元素及其余子式都等于 a，则 D 等于(　　).

(A)0　　(B)a^2　　(C)$-a^2$　　(D)na^2

2 行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 非零的充要条件是(　　).

(A)$\boldsymbol{A}$ 中所有元素非零

(B)$\boldsymbol{A}$ 中至少有 n 个元素非零

(C)$\boldsymbol{A}$ 的任意两行元素之间不成比例

(D) 以 $|\boldsymbol{A}|$ 为系数行列式的线性方程组有唯一解

3 假设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，其秩$(\boldsymbol{A})=r<n$，那么在 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量中(　　).

(A) 必有 r 个行向量线性无关

(B) 任意 r 个行向量线性无关

(C) 任意 r 个行向量都构成极大线性无关向量组

(D) 任何一个行向量列向量均可由其他 r 个列向量线性表示

4 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 经过若干次初等变换后所得到的矩阵，则有(　　).

(A)$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$　　(B)$|\boldsymbol{A}|\neq|\boldsymbol{B}|$

(C) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则一定有 $|\boldsymbol{B}|=0$　　(D) 若 $|\boldsymbol{A}|>0$，则一定有 $|\boldsymbol{B}|>0$

5 设向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组(Ⅱ)：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，则(　　).

(A) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，则 $r\leqslant s$

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，则 $r\leqslant s$

(C) 若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关，则 $r\leqslant s$

(D) 若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关，则 $r\leqslant s$

6 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则(　　).

(A)$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性无关　　(B)$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关

(C)$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$　　(D)$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$

7 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 中未知量个数为 n，方程个数为 m，系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，则(　　).

(A)$r=m$ 时，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解

(B)$r=n$ 时，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(C)$m=n$ 时，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(D)$r<n$ 时，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

8 设 A 为 $n\times m$ 矩阵且 $r(A)=n(n<m)$，则下列结论中正确的是(　　).

(A) 若 $AB=AC$，则 $A=C$　　(B) 若 $BA=CA$，则 $B=C$

(C) A 的任意 n 个列向量线性无关　　(D) A 的任意 n 个行向量线性相关

9 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $AX=0$ 的基础解系，则该方程组的基础解系还可表示成(　　).

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个等价向量组　　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个等秩向量组

(C) $\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$　　(D) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

10 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的充要条件是(　　).

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 均不为零向量

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意两个向量的分量不成比例

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意一个向量均不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中有一部分向量线性无关

11 设矩阵 $A_{m\times n}$，$r(A)=m<n$，E_m 为 m 阶单位矩阵，下述结论中正确的是(　　).

(A) A 通过初等行变换必可化为 $[E_m,O]$ 的形式

(B) A 的任意 m 阶子式不等于零

(C) A 的任意 m 个列向量必线性无关

(D) 非齐次线性方程组 $AX=b$ 一定有无穷多解

12 设 $A=\begin{pmatrix}3 & a+2 & 4\\ 5 & a & a+5\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$，若齐次方程组 $AX=0$ 的任一非零解均可用 α 线性表示，则 $a=$(　　).

(A)3　　(B)5　　(C)3 或 -5　　(D)5 或 -3

13 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ 都是线性方程组 $AX=0$ 的解向量，只要系数矩阵 A 为(　　).

(A) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

14 设 $A=\begin{pmatrix}-7 & 4 & -4\\ -18 & 10 & -8\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$，则(　　)不是 A 的特征向量.

(A) $(-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$　　(B) $(1,2,0)^{\mathrm{T}}$

(C) $(0,1,1)^{\mathrm{T}}$　　(D) $(2,4,-1)^{\mathrm{T}}$

15 下列矩阵中，不能相似对角化的是(　　).

(A) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ -1 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 6\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 5 & 0 & 3\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}7 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 9\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

16 设 A,B 均为 n 阶实对称矩阵，若 A 与 B 合同，则(　　).

(A) A 与 B 有相同的特征值　　(B) A 与 B 有相同的秩

(C) A 与 B 有相同的特征向量　　(D) A 与 B 有相同的行列式

17 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 与 B(　　).

(A) 合同且相似　　(B) 合同但不相似

(C) 不合同但相似　　(D) 不合同且不相似

二 填空题

1 设 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{pmatrix}$，则 $|A|=$_____.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

2 $\begin{vmatrix}0&-a&b\\a&0&-c\\-b&c&0\end{vmatrix}=$_____.

3 设 A,B 均为 n 阶方阵，$|A|=2$，$|B|=-3$，则 $|A^{-1}B^{*}-A^{*}B^{-1}|=$_____.

4 设三阶方阵 $A=[A_1,A_2,A_3]$，其中 $A_i(i=1,2,3)$ 为三维列向量，且 A 的行列式 $|A|=-2$，则行列式 $|-A_1-2A_2,2A_2+3A_3,-3A_3+2A_1|=$_____.

5 设 A 是三阶方阵，且 $|A-E|=|A+2E|=|2A+3E|=0$，则 $|2A^{*}-3E|=$_____.

6 设 A 为四阶可逆方阵，将 A 第 3 列乘 3 倍再与第 1 列交换位置，得到矩阵 B，则 $B^{-1}A=$_____.

7 设 A 为 4×3 矩阵，且 $r(A)=2$，而 $B=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$，则 $r(AB)=$_____.

8 向量组 $\alpha_1=[0,4,2-k]$，$\alpha_2=[2,3-k,1]$，$\alpha_3=[1-k,2,3]$ 线性相关，则实数 $k=$_____.

9 设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$，三维列向量 $\alpha=(a,1,1)^{T}$. 已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关，则 $a=$_____.

10 设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\0\\c\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}b\\c\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\a\\b\end{pmatrix}$ 线性无关，则 a,b,c 必满足关系式_____.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013　祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

11. 若线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2=a_1, \\ x_2+x_3=a_2, \\ x_3+x_4=a_3, \\ x_1+x_4=a_4 \end{cases}$ 有解，则常数 a_1,a_2,a_3,a_4 应满足条件_____.

12. 若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & t \\ 1 & 9 & t+7 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 是三阶非零矩阵，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $t=$_____.

13. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,3,\lambda$，若行列式 $|2\boldsymbol{A}|=-48$，则 $\lambda=$_____.

14. 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 的非零特征值是_____.

15. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & a \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，则 $a=$_____.

16. 若 $\begin{pmatrix} 22 & 31 \\ y & x \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 相似，则 $x=$_____，$y=$_____.

17. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 只有两个线性无关的特征向量，则 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值是_____，$a=$_____.

三 解答题

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$，求：(1) $2A_{11}+A_{12}-A_{13}$；(2) $A_{11}+4A_{21}+A_{31}+2A_{41}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{3}$，求 $|4\boldsymbol{A}-(3\boldsymbol{A}^*)^{-1}|$.

3. $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，三维列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，满足 $\boldsymbol{A\beta}_1=\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{A\beta}_2=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{A\beta}_3=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$，求 $|\boldsymbol{A}|$.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 可逆，求 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

5 设 A,B 为三阶矩阵，满足 $AB+E=A^2+B$，E 为三阶单位矩阵，又知 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

求矩阵 B.

6 已知 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$，$AP=PB$，求 A 与 A^5.

7 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&1&-3/4\\0&-2/3&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ 满足 $A^{-1}(E-BB^TA^{-1})^{-1}C^{-1}=E$，求 C.

8 解方程 $\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&1&-1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\end{pmatrix}$.

9 设向量组(Ⅰ)：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；(Ⅱ)：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 的秩分别为秩(Ⅰ)=2，秩(Ⅱ)=3. 证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4$ 的秩等于 3.

10 已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1,\\x_1+3x_2+6x_3+x_4=3,\\3x_1-x_2-k_1x_3+15x_4=3,\\x_1-5x_2-10x_3+12x_4=k_2,\end{cases}$ 问 k_1 和 k_2 各取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多组解？在方程组有无穷多组解时，试求出一般解.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

11 设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\2\\10\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}$.

试问：当 a,b,c 满足什么条件时

(1)β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，且表示法唯一；

(2)β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，但表示法不唯一，并求出一般表达式.

(3)β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出；

12 设线性方程组(Ⅰ) $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=0,\\2x_1+3x_2+x_3-3x_4=0,\\3x_1+5x_2+2x_3-4x_4=0;\end{cases}$ (Ⅱ) $\begin{cases}x_1+x_2+mx_4=0,\\x_1+nx_2+2x_3=0.\end{cases}$

(1) 求线性方程组(Ⅰ)的通解；

(2)m,n 取何值时，方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有公共非零解；

(3)m,n 取何值时，方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)同解.

13 设四元齐次线性方程组(Ⅰ)为 $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0,\\x_1+2x_2+x_3-x_4=0,\end{cases}$ 且已知另一个四元齐次线性方程组(Ⅱ)的一个基础解系为 $\alpha_1=(2,-1,a+2,1)^T$，$\alpha_2=(-1,2,4,a+8)^T$.

(1) 求方程组(Ⅰ)的一个基础解系；

(2) 当 a 为何值时，方程组(Ⅰ)与方程组(Ⅱ)有非零公共解？

14 已知 0 是 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&a\end{pmatrix}$ 的特征值，求 a 和 A 的其他特征值及线性无关的特征向量.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

15. 设 A 是三阶矩阵，其特征值是 $1,2,3$，若 A 与 B 相似，求 $|B^*+E|$.

16. 已知二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\ (a>0)$ 通过正交变换化成标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$. 求参数 a 及所用的正交变换矩阵.

17. 设 a 是整数，若矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&a&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 A^* 的特征值是 $4,-14,-14$. 求正交矩阵 Q，使 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角矩阵.

18. n 阶矩阵 A 满足 $A^2-2A-3E=O$，证明：A 能相似对角化.

19. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\a&4&b\\-3&-3&5\end{pmatrix}$，已知 A 有三个线性无关的特征向量且 $\lambda=2$ 为矩阵 A 的二重特征值，求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

20. 已知 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&t\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\3&3&3\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&5\\0&0&5\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

(1) t 取何值时，A 为正定矩阵？为什么？

(2) t 取何值时，A 与 B 等价？为什么？

(3) t 取何值时，A 与 C 相似？为什么？

(4) t 取何值时，A 与 D 合同？为什么？

21. 考虑二次型 $f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$，问 λ 取何值时，f 为正定二次型？

22. 设 A 为三阶实对称矩阵，且满足条件 $A^2+2A=O$. 已知 $r(A)=2$.

(1) 求 A 的全部特征值；

(2) 当 k 为何值时，矩阵 $A+kE$ 为正定矩阵，其中 E 为三阶单位矩阵.

23. 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩和正、负惯性指数.

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

上岸刷题 4件套

- 题型丰富，重要考点反复练
- 备考各阶段，难度层层升级
- 不同水平考生皆可适用
- 6000 分钟配套视频助上岸

- 30 天集中突破强化复习瓶颈
- 高数、线代、概率三科全覆盖
- 选题经典，提升解题运算能力
- 解析详细，思路更清晰

- 全国万人模考配套用书
- 直击盲点，检验阶段复习效果
- 契合真题，远离偏题、怪题
- 查漏补缺，突破解题思路

- 考前临门一脚提分宝典
- 焕新改版，冲刺复习查漏补缺
- 紧扣大纲，试题涵盖热门考点
- 模拟真题，提前感受考场氛围

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸

更多考研考证类日更网盘群&笔记类资料 请关注微信公众号【乘龙考研】或者添加学长微信 Learn52013

KNOWLEDGE SOURCES

汤家凤 南京大学博士

考研数学辅导老师，
连续多年从事考研数学教学工作，
能融会贯通地讲授高等数学、线性代数和概率论与数理统计三门课程，
以其专业的知识与能力和独特的讲课风格深受学生的喜爱，
每年都指导出大量高分学生。

- ◇《考研数学高等数学辅导讲义·基础篇》
- ◇《考研数学高等数学辅导讲义》
- ◇《考研数学线性代数辅导讲义》
- ◇《考研数学概率论与数理统计辅导讲义》
- ◆**《考研数学接力题典1800》（数学一、二、三）**
- ◇《考研数学复习大全》（数学一、二、三）
- ◇《考研数学历年真题全解析·基础篇》（数学一、二、三）
- ◇《考研数学历年真题全解析·提高篇》（数学一、二、三）
- ◇《考研数学高分突破180题》
- ◇《考研数学强化测试5套卷》（数学一、二、三）
- ◇《考研数学考前冲刺8套卷》（数学一、二、三）

汤家凤
新浪微博

汤家凤
微信公众号

扫码领取
配套课程

抖音： 汤家凤
B站： 数学汤家凤
小红书： 数学汤家凤
视频号： 数学汤家凤

上架指导｜考研类图书

ISBN 978-7-5764-0188-2

9 787576 401882 01>

定价：89.00元（全两册）

有任何网盘群类资料需求都可添加学长微信 Learn52013 祝您考研上岸